# Quelques problèmes de géométrie Finslérienne et Kählerienne

Inès Adouani

**Université de Tunis El Manar**
**École doctorale de FST**
**Faculté des sciences Mathématiques Physiques et Naturelles de Tunis**

**Université Pierre Et Marie Curie**
**École Doctorale de Paris Centre**
**Institut de Mathématiques de Jussieu UFR 929**

# Thèse de doctorat

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présentée par

**Ines Adouani**

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DES UNIVERSITÉS DE PIERRE ET MARIE CURIE ET DE TUNIS EL MANAR

---

# Quelques problèmes de géométrie Finslérienne et Kählerienne

---

Soutenue le 11 Mai 2015 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. Athanase Papadopoulos | Université de Strasbourg | Rapporteur |
| M. Paolo De Bartolomeis | Université de Florence | Rapporteur |
| M. Fethi Hagui | Université de Monastir | Rapporteur |
| M. Pascal Cherrier | Université Pierre et Marie Curie | Examinateur |
| M. Sami Baraket | Université de Tunis El Manar | Examinateur |
| M. Adnène Ben Abdesslem | Université Pierre et Marie Curie | Directeur de thèse |
| M. Mohamed Selmi | Université de Sousse | Directeur de thèse |
| M. Gilles Courtois | Université Pierre et Marie Curie | Président du Jury |

Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu
75005 Paris

UPMC
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boite courrier 290

À la mémoire de ma mère !

"La pensée a des ailes, nul ne peut empêcher son envol."
Ibn Rochd (Averroès)

**إنّما تنجح الفكرة إذا قوي الإيمان بها ، وتوفّر الإخلاص في سبيلها ، وازدادت الحماسة لها، و وجد الاستعداد الذي يحمل على التّضحية والعمل لتحقيقها**

# Remerciements

Ce travail de recherche est le résultat d'une convention de cotutelle entre l'université de Tunis El Manar et l'université Pierre et Marie Curie.

J'aimerais tout d'abord exprimer ma très sincère reconnaissance à l'égard de mes deux directeurs de thèse, Monsieur Adnène Ben Abdesslem et Monsieur Mohamed Selmi, qui ont été, chacun a sa manière, d'une aide précieuse dans la réalisation de cette thèse.

Monsieur Adnène Ben Abdesslem pour sa disponibilité constante, pour m'avoir initié à son domaine de recherche et pour ses conseils avisés tout au long de cette thèse. Avec lui j'ai pu découvrir les fabuleux plaisirs de la recherche sous ses apparences les plus diverses. Qu'il trouve ici tout mon respect et ma respectueuse reconnaissance.

Monsieur Mohamed Selmi qui a cru en mes compétences jusqu'au bout et a fait preuve d'une grande générosité envers moi. Merci d'avoir su me conseiller, m'encourager, me supporter et me soutenir. J'espère avoir été à la hauteur de ses attentes. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je l'ai croisé durant ces quatre années de thèse pendant les conférences de Finsler, et c'est avec un immense honneur qu'il soit mon rapporteur de thèse. Monsieur Athanase Papadopoulous, je vous remercie énormément d'avoir pris le temps de lire attentivement ma thèse, ainsi que pour vos remarques pertinentes. Je remercie également Monsieur Paolo de Partolmeis d'avoir eu l'amabilité de rapporter cette thèse, pour sa sympathie et sa gentillesse depuis notre première rencontre. Merci pour vos remarques et vos questions qui ont permis de mettre en valeur ce document de synthèse.

C'est aussi un immense honneur d'avoir compter Monsieur Gilles Courtois et Monsieur Pascal Cherrier parmi les membres de jury. Monsieur Gilles Courtois, je vous remercie pour m'avoir intégré dans l'équipe d'Analyse Complexe et Géométrie, pour votre gentillesse et pour m'avoir toujours très bien accueillie. Monsieur Pascal Cherrier, je suis reconnaissante pour le temps que vous m'avez accordé pour corriger soigneusement mon article. Les discussions qu'on a eu ne fut que éclaircir mes idées et améliorer mes résultats.

Je remercie chaleureusement Monsieur Fethi Hagui et Monsieur Sami Baraket pour avoir bien voulu faire partie de Jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de différents financeurs qui, à travers leurs aides, ont reconnu mon travail et m'ont fait confiance : Le laboratoire de Physique Mathématique et Fonctions Spéciales de Hammam Sousse représenté par son directeur Monsieur Mohamed Selmi, le projet de coopération franco-tunisienne (CMCU) représenté par Monsieur Michael Seuseneur et Monsieur Leila Ben Abdelghani et Monsieur Gilles courtois pour avoir financé mes déplacements pour les conférences internationales sur la géométrie complexe.

Je tiens à remercier grandement Marco Abate avec qui j'ai eu une très fructueuse discussion. Je le remercie également d'avoir corriger mon article, de partager avec moi ses idées et pour l'intérêt porté sur mon travail. Je mesure à sa juste valeur le temps qu'il m'a accordé.

Je garde un souvenir chaleureux de mes amis thésards de l'IMJ-PRG, passés et présents pour leur proximité et pour les bons moments que j'ai partagé avec eux. Merci à Liana, Maÿlis, François L, Olivier, Thibaud , Ghadeer, Juliette, Lucas, Andrés, Nicolas et sa copine catalina. Un remerciement particulier à Karam et Anne d'avoir supporté mon stress, d'avoir partagé mes moments de joie et de tristesse, de doute et de peur. Tous ces instants autour d'un sandwich ou d'un café ont été autant de moments de détente indispensables pour mon travail.

Mes pensées se tournent aussi vers mes collègues de bureau pour les conditions de travail privilégiées qui m'ont été offertes et tout particulièrement à Ruben pour sa gentillesse, sa disponibilité, et son efficacité.

Merci aux professeurs et aux personnels administratifs que j'ai connu à l'IMJ-PRG.

J'associe ces remerciements à l'ensemble de mes collègues à l'ISSAT de Sousse pour leur soutien et leur encouragement constant. Merci à Monsieur Khaled Omrani qui n'a jamais cessé de m'aider et m'offrir les bonnes conditions pour assurer le bon déroulement de ma thèse. Merci à Monsieur Farouk Cherif pour son bonne humeur, pour toutes les discussions profitables que j'ai eu avec lui , pour son soutien et sa gentillesse. Merci à Emna, Ahlem, Nesrine, pour tous les moments de bonheur que l'on a passé ensemble à Sousse.

Une pensée profonde et affectueuse à ma chère Amel qui m'a toujours soutenu, d'avoir enduré mon stress, mes doutes, mes craintes, mes hauts et mes bas avec amour et générosité.

J'ai croisé pendant ces années de thèse des nombreux condisciples durant les séminaires et les conférences qui furent d'une agréable compagnie. Je pense à Sarah, Sugata, Zeina, Petros, Daniele , Fabrizio.. Leur contact amical a contribué dans mes choix concernant les métiers de la recherche. Qu'ils en soient remerciés.

La thèse a marqué une très belle étape de ma vie : Paris. Je voudrais remercier la famille Gragueb Chatti qui m'a apporté accueil, soutien et proximité lors de mes séjours Parisien. En m'offrant leur hospitalité chaleureuse, ils m'ont permis d'effectuer mes recherches dans les meilleures conditions possibles. Merci au fou rire de Mohamed yassine et Imran, c'était des rayons de soleil qui ont éclairé le ciel gris de Paris, qui m'ont motivé sans cesse pour arriver au bout de cette thèse.

Il est naturel que ma pensée la plus forte aille vers ma mère Saida décédée en ma deuxième année de thèse. Sache maman que les moments de douleurs, de tristesse et de souffrance que j'ai vécu après ta mort m'ont armé de courage et d'audace pour aboutir à cette thèse. J'espère que ce travail est un humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'une fille qui a toujours prié pour le salut de ton âme. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde !

Ce travail est dédié aussi à mon père Moncef qui n'a jamais cessé de me soutenir, m'assister et m'encourager. A celui qui a sacrifié ses plus belles années pour embellir les miennes, je dois ma réussite. Les mots ne seraient jamais pour témoigner de l'étendue des sentiments que j'éprouve à son égard. J'espère être à la hauteur de fierté inconditionnelle. Papa, je suis consciente que le chemin a été long et pénible pour toi, mais je sais que tu es toujours là à mes cotés.

Je remercie vivement mon frère Riadh qui m'a supporté aux moments où j'ai été insupportable, pour sa solidarité et ses encouragements. Merci aussi à ma « s ?ur » Hela pour son soutien et sa présence sans faille. Mes remerciements vont aussi à mes cousins et mes cousines qui, avec cette question récurrente, « quand est-ce que tu la soutiens cette thèse ?», bien qu'angoissante en période fréquente de doutes, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de cette thèse.

# Résumé

Cette thèse traite de quelques problèmes classiques en géométrie complexe.

La première partie est consacrée à la géométrie Finslérienne complexe. Étant donnés deux fibrés vectoriels holomorphes $E_1$ et $E_2$, munis respectivement de deux structures Finslériennes $F_1$ et $F_2$, on construit une métrique Finslérienne $F$ sur le fibré $E_1 \otimes E_2$ faisant intervenir les structures Finslériennes initiales. Moyennant une hypothèse sur les sections globales de $E_1^*$ et $E_2^*$, on donne une condition optimale sous laquelle $F$ est strictement pseudoconvexe à courbure négative. Ce résultat est présenté après un chapitre constituant un background Finslérien témoignant de la recherche bibliographique en amont de cette thèse et de quelques initiatives et essais personnels.

La seconde partie de ce travail traite d'un problème en géométrie Kählerienne. On prouve l'existence d'une fonction "extrémale" minorant toutes les fonctions admissibles (c'est à dire strictement pseudoconvexe à la métrique initiale près) à sup nul sur des variétés de Fano non toriques, à savoir la grassmannienne complexe $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. Les fonctions considérées sont invariantes par un groupe d'automorphismes convenablement choisi. Cette minoration est faite dans le but de calculer l'invariant de Tian sur de telles variétés, les initiatives dans le cas non torique restant très rares, même sur les variétés les plus simples.

**Mots-clefs**

Structure Finslérienne complexe, Connexion Finslérienne de Chern, Courbure de la connexion Finslérienne de Chern, Négativité d'un fibré vectoriel.
Métrique Einstein-Kähler , Grassmannienne complexe, Fonction admissible, Première classe de Chern, Variété de Fano, Invariant de Tian.

# Abstract

This thesis deals with some classical problems in complex geometry.

The first part is devoted to a problem in complex Finsler Geometry. Giving two holomorphic vector bundles $E_1$ and $E_2$, respectively endowed with two Finsler structures $F_1$ and $F_2$, we build a Finsler metric $F$ on $E_1 \otimes E_2$ involving the two initial Finsler structures. This is done under some assumptions on global sections of $E_1^*$ and $E_2^*$. We give an optimal condition under which $F$ is strictly pseudoconvex with negative curvature. This result is preceded by a chapter containing a background material in complex Finsler geometry and some personal attempts.

The second part of this thesis deals with a problem in Kähler Geometry. We prove the existence of an "extremal" function lower bounding all admissible functions (ie plurisubharmonic functions modulo a metric) with sup equal to zero on the complex Grassmann manifold $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. The functions considered are invariant under a suitable automorphisms group. This gives a conceptually simple method to compute Tian's invariant in the case of a non toric manifold.

**Keywords**

Complex Finsler structure, nonlinear connection, Chern-Finsler connection, Complex Finsler Curvature, Negative vector bundle.
Einstein-Kähler metric, Grassmann manifold, Admissible function, First chern class, Fano manifold, Tian's Invariant.

# Table des matières

# Introduction

Le cadre général de cette thèse est la géométrie complexe et plus particulièrement de certains problèmes liés à la géométrie Finslérienne complexe et à la géométrie Kählérienne. Sa présentation s'articule autour de deux articles intitulés **"Structures Finslériennes complexes sur le produit tensoriel"** et **"Enveloppe inférieure de fonctions admissibles sur la grassmannienne $\mathbf{G_{m,nm}}(\mathbb{C})$"**. Bien que d'apparence différents, les deux thèmes traités sont connexes. En effet, les variétés Kählériennes considérées étant de Fano, leur fibré anti-canonique $\Lambda^n TX$ est ample à l'instar du dual de ceux considérées dans l'étude du produit tensoriels de deux fibrés Finslériens. Dans les deux cas, il s'agit de manipuler certaines classes de métriques sur des variétés complexes : Des métriques Finslériennes complexes sur un produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ et des métriques Kählériennes sur un cas de variétés non toriques à savoir la Grassmanniennes des $m$-plans de $\mathbb{C}^{nm}$ : $G_{m,nm}(\mathbb{C})$.

## 0.1 Structures Finslériennes complexes sur le produit tensoriel

Le premier travail de cette thèse se place dans le cadre de la géométrie Finslérienne complexe, initialement introduite par Rizza en 1963 [R1] utilisant des méthodes d'analyse tensorielle. En 1966 Rund [R2] a développé ce thème par des considérations purement locales motivées par les calculs des variations et identiques au cas de la géométrie Finslérienne réelle. En effet, une métrique Finslérienne $F$ sur une variété complexe $X$ ou sur un fibré vectoriel holomorphe $E$ est la donnée pour chaque point de la base d'une norme de Minkowski complexe sur la fibre associée. Une norme de Minkowski complexe est une fonction $F$ définie sur $\mathbb{C}^n$ fortement homogène dans le sens où $F(\lambda\eta) = |\lambda| F(\eta)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $\eta \in \mathbb{C}^n$, positive pour tout $\eta \in \mathbb{C}^n$ (nulle si et seulement si $\eta = 0$), $C^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et telle que pour tout $\eta \in \mathbb{C}^n$, la matrice Hermitienne $\left(\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}\right)$ est définie positive sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Par conséquent si une métrique Finslérienne $F$ est définie sur un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$ de rang $r$, chaque fibre $E_z$ est considérée comme un $\mathbb{C}^r$-espace de Minkowski muni de la norme $\| \eta \|_z = F(z,\eta)$.

Dans le même article [R2](voir aussi [R3]), Rund introduit une définition d'une connexion dans le cas de la géométrie Finslérienne complexe ainsi que les structures géométriques associés (courbures, torsion, équations des géodésiques...). Cette connexion est uniquement déterminée par ses composantes horizontales. Ainsi, la courbure de Rund est de type $hh$-courbure et $hv$-courbure. Les symboles "$h$" et "$v$" se réfèrent aux composantes horizontales et verticales dans un sens précis qui sera expliqué ultérieurement.

En 1975 Kobayashi a proposé une définition "complète" de la connexion Finslérienne complexe (voir [K2] et [K3]). C'est une connexion Hermitienne de type $(1,0)$ définie sur les sections du fibré $p^{-1}E$ pull-back d'un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$ dont la base est le fibré projectif $p : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$. Sa courbure $\Omega$ possède 4 cœfficients $R$, $H$, $P$ et $Q$ tels que $R$ est nommée la $hh$-courbure, $P$ et $H$ sont les cœfficients de la $hv$-courbure et $Q$ est celle de la $vv$-courbure. Suivant l'approche de Kobayashi, il existe un biholomorphisme entre un fibré vectoriel holomorphe $E \setminus \{0\}$ et le fibré tautologique $L(E)$ défini par

$$L(E)|_{(z,[\eta])} = \{Z \in E_z | Z \in \mathbb{C}.\eta\} = p^{-1}E|_{(z,[\eta])}, \quad \forall (z,[\eta]) \in \mathbb{P}(E)$$

privé de sa section nulle. De ce fait, à toute métrique Hermitienne $h$ sur $L(E)$ correspond une métrique Finslérienne $F$ sur $E$ telle que $F^2(\eta) = h(\eta)$ pour tout $\eta \in E$. Réciproquement si $E$ est muni d'une métrique Finslérienne $F$, le tenseur fondamental $G_{i\bar{j}} = \left( \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}(z,\eta) \right)$ définit une métrique Hermitienne sur $p^{-1}E$, étant donné qu'il est zéro homogène par rapport aux variable de la fibre $p^{-1}E|_{(z,[\eta])}$ (i-e $G_{i\bar{j}}(z,\lambda\eta) = G_{i\bar{j}}(z,\eta)$) et est défini positif. Ainsi, pour le fibré vectoriel holomorphe hermitien $p^{-1}E$ il existe une unique connexion Hermitienne de type $(1,0)$ (connexion de Chern associé à la métrique Hermitienne ainsi définie sur $p^{-1}E$), cette connexion est nommée connexion Finslérienne complexe sur le fibré $E$. Plus tard, ce résultat a été développé par les travaux de M.Abate et G.Patrizio [A-P] qui ont mis en évidence l'importance des composantes horizontales de cette connexion pour décrire les propriétés géométriques d'une variété complexe muni d'une métrique Finslérienne.

La géométrie Finslérienne complexe a aussi suscité l'intérêt d'autres mathématiciens tels que Lembert, Faran, et Aikou. Ceci relève des applications intéressantes qu'elle présente. En effet, il existe deux métriques Finslériennes remarquables en géométrie Finslérienne complexe, la métrique de kobayashi qui est seulement semi-continue supérieurement et la métrique de Carathéodory qui est continue. En revanche, Lembert en [L1] (Voir aussi [L2]) prouve que sur un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ borné strictement convexe, la métrique de Kobayashi ainsi que la métrique de Carathéodory (qui coïncident dans ce cas sur $D$) sont de classe $C^\infty$. Ce résultat s'ouvre à plusieurs problèmes en géométrie Finslérienne complexe tels que les équations de géodésiques, le potentiel de Monge-Ampère, etc...

Parmi les autres problèmes classiques de la géométrie Finslériennes complexe, Faran [F], s'inspirant de ce qui a été fait par Chern [C] dans le cas de la géométrie Finslérienne réelle, a étudié le problème d'équivalence de métriques (relatif à certains type de transformations).

Enfin, l'application de la géométrie Finslérienne complexe qui nous intéresse dans cette thèse est liée à l'étude de la négativité des fibrés vectoriels holomorphes. Cette application a été établie par Soshishi Kobayashi par les théorèmes suivants :

**Théorème 0.1.1** *(Kobayashi [K2]) Soit $F$ une métrique Finslérienne complexe sur $E$ et $h$ la métrique Hermitienne correspondante sur $L(E)$. Alors $F$ est à courbure négative si et seulement si $h$ est à courbure négative.*

Par conséquent :

**Théorème 0.1.2** *(Kobayashi [K2]) Un fibré vectoriel holomorphe $E$ au dessus d'une variété complexe $X$ est négatif si et seulement si il admet une métrique Finslérienne strictement pseudoconvexe à courbure négative.*

En outre, la courbure $\bar{\partial}\partial \log F^2$ de $L(E)$ est donnée par :(Voir [B-K], [A3]) :

$$\bar{\partial}\partial \log F^2 = \frac{1}{F^2} R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j \; dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta - \frac{\partial^2 \log F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} \delta\eta^i \wedge \delta\bar{\eta}^j \tag{0.1.1}$$

où

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j = -\frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^i \eta^{\bar{j}}}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \eta^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \eta^i} \tag{0.1.2}$$

et

$$\frac{\partial^2 \log F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} + \frac{1}{F^4} \frac{\partial F^2}{\partial \eta^i} \frac{\partial F^2}{\partial \bar{\eta}^j} \tag{0.1.3}$$

$F$ étant une métrique Finslérienne strictement pseudoconvexe, la matrice Hermitienne $\left(\dfrac{\partial^2 \log F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}\right)$ est alors définie positive. Par conséquent $\bar{\partial}\partial \log F^2$ est définie négative si et seulement si $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}\eta^i\bar{\eta}^j$ est définie négative.

A l'issue de cet article [K2], Kobayashi avait posé un certain nombre de question parmi lesquelles celle qui consiste à retrouver en termes de géométrie Finslérienne le théorème de Hartshorne sur la négativité du produit tensolriel $E_1 \otimes E_2$ de deux fibrés holomorphes $E_1$ et $E_2$ négatifs. Une réponse partielle a été donnée par Ben Abdesselem [B] sous l'hypothèse $(E_1, F_1)$ négatif et $E_2^*$ (le dual du fibré $E_2$) engendré par ses sections globales.

Notre but dans "**Structures Finslériennes complexes sur le produit tensoriel**" est de construire une métrique Finslérienne $F$ sur le fibré $E_1 \otimes E_2$ faisant intervenir les deux métriques Finslériennes $F_1$ et $F_2$ définies respectivement sur $E_1$ et $E_2$ (et non pas une seule comme dans [B]).
Considérons $N_1$ sections globales $\left(\varphi^1, ..., \varphi^{N_1}\right)$ sur $E_2^*$, et $N_2$ sections globales $\left(\psi^1, ..., \psi^{N_2}\right)$ sur $E_1^*$, vérifiant l'hypothèse $(H)$ suivante :
$(H)$ : En tout point $z \in X$ on a : $\left(\varphi^1(z), ..., \varphi^{N_1}(z)\right)$ engendrent $(E_2^*)|_z$ ou $\left(\psi^1(z), ..., \psi^{N_2}(z)\right)$ engendrent $(E_1^*)|_z$.
Cette hypothèse est plus faible que le fait que $E_1^*$ et $E_2^*$ soient engendrés par leurs sections globales. En fait, les sections globales de l'un l'engendrent dès que ceux de l'autre lui font défaut. Cette hypothèse nous permet d'assurer que $F$ ainsi définie sur le fibré $E_1 \otimes E_2$ est strictement pseudoconvexe. Nous obtenons finalement le résultat suivant :

**Théorème 0.1.3** *Soient $(E_1, F_1)$ et $(E_2, F_2)$ deux fibrés vectoriels holomorphes au dessus d'une variété complexe $X$, munis des structures Finslériennes $F_1$ et $F_2$, et soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $F_1^p$ et $F_2^q$ soient $C^2$ au dessus de la section nulle (on choisira les plus petits). On suppose l'existence de sections globales $\left(\varphi^1, ..., \varphi^{N_1}\right)$ (respectivement $\left(\psi^1, ..., \psi^{N_2}\right)$) sur $E_2^*$ (respectivement $E_1^*$) vérifiant l'hypothèse $(H)$.*

*Alors l'application $F : E_1 \otimes E_2 \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\forall b \in E_1 \otimes E_2, \quad F(b) = \sqrt{\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}} \tag{0.1.4}$$

*est une structure Finslérienne de classe $C^2$ strictement pseudoconvexe sur le fibré $E_1 \otimes E_2$, où $b \in E_1 \otimes E_2$, $b_a = b(., \varphi^a) \in E_1$, et $\tilde{b}_c = b(\psi^c, .) \in E_2$ .*

Dans un second résultat, nous présentons les conditions optimales en termes de traces des métriques $F_1$ et $F_2$ sur les sections globales de $E_1$ et $E_2$ qui puissent nous permettre d'affirmer la négativité du produit tensoriel, c'est à dire la négativité de la courbure de la structure Finslérienne proposée. Posons :

$$R_1(z, b_a) = -\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \bar{b}_a^k}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k} \tag{0.1.5}$$

et

$$R_2(z, \tilde{b}_c) = -\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \bar{\tilde{b}}_c^k}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k} \tag{0.1.6}$$

On obtient :

**Théorème 0.1.4**
*Soient $(E_1, F_1)$ et $(E_2, F_2)$ deux fibrés vectoriels holomorphes munis respectivement de deux métriques Finslériennes $F_1$ et $F_2$. Sous les hypothèses du théorème 1, $F$ est à courbure négative dès que*

$$\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}-1} \sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a) R_1(z, b_a) + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}-1} \sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c) R_2(z, \tilde{b}_c) \tag{0.1.7}$$

*est définie négative.*

Ces résultats font l'objectif du second chapitre. En revanche, le premier chapitre est un témoignage du travail bibliographique fait en amont de ma thèse sur la géométrie Finslérienne complexe. Dans une première partie nous présentons l'approche donnée par Kobayashi en [K2] et [K3] pour définir les structures Finslérienne complexes (connexion, courbure,...) ainsi que les théorèmes fondamentaux traitant la négativité d'un fibré vectoriel holomorphe.
D'autre part, ce chapitre contient aussi un essai personnel consistant à reprendre ces notions dans un langage plus intrinsèque tout en nous inspirant du cas de la géométrie Finslérienne réelle. En particulier on remplace la base $\mathbb{P}(E)$ de $p^{-1}E$ par le fibré $E/\{0\}$. Nous suivons essentiellement l'approche des auteurs [A-P] et de [A4] où nous pouvons percevoir d'une manière explicite la technique des connexions non linéaires et des repères mobiles s'adaptant à une décomposition du fibré tangent holomorphe $T^{1,0}E^0$ en sous-fibré horizontal et vertical. Cette manipulation nous permet de retrouver une définition de négativité d'un fibré vectoriel holomorphe équivalente à celle présentée par Kobayashi.

## 0.2 Enveloppe inférieure de fonctions admissibles sur la grassmanniennes $G_{m,nm}(\mathbb{C})$

Ce deuxième travail se place dans le cadre de la géométrie Kählerienne. Nous nous intéressons essentiellement au calcul de l'invariant de Tian sur des variétés de Fano. Ce calcul procure une méthode qui permet de mettre en évidence une métrique d'Einstein-Kähler sur certaines variétés Kähleriennes compactes à première classe de Chern positive.

Le problème d'origine est celui de l'existence de métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés Kähleriennes compactes $X$. Ici, on ne s'intéresse qu'à l'estimation de la constante de Tian, le variétés considérées étant munies de métriques d'Einstein-Kähler "naturelles". Rappelons qu'une métrique est dite d'Einstein-Kähler si la une $(1,1)$-forme associée $\omega$ vérifie, pour un nombre réel $\lambda$, la relation

$$R = \lambda\omega \tag{0.2.1}$$

où $R$ est la forme de Ricci de $\omega$, i-e la $(1,1)$-forme réelle fermée associée à la courbure de Ricci. Si $w = ig_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ est la forme de Kähler associé à la métrique Kählerienne $g$ sur $X$, alors sa forme de Ricci est donnée, en écriture locale par ses composantes :

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log(\det(g_{\alpha\beta})) \tag{0.2.2}$$

où $\partial_{\alpha\bar{\beta}} = \dfrac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$. Sa classe de cohomologie est $[R] = 2\pi C_1(X)$ où $C_1(X)$ désigne la première classe de Chern réelle du fibré $T_{\mathbb{C}}X$. Par conséquent, la variété Kählerienne $X$ ne peut admettre une métrique d'Einstein que si $C_1(X)$ est positive, négative ou nulle (i.e contient une $(1,1)$-forme positive, resp. négative, resp. nulle).

Le cas $C_1(X) = 0$, qui est un cas particulier de la conjecture de Calabi, a été résolu par Yau [Y] et Aubin en [A1].
Plaçons-nous maintenant dans le cas $C_1(X) > 0$ (resp. $C_1(X) < 0$). Le problème 0.2.1 se ramène à trouver des fonctions $\varphi$ réelles lisses et $g$-admissibles (i.e $g_{\alpha\bar{\beta}} + \partial_{\alpha\bar{\beta}}\varphi$ est définie positive) telle que :

$$g'_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}} + \partial_{\alpha\bar{\beta}}\varphi \tag{0.2.3}$$

soit d'Einstein-Kähler. Par ailleurs, on montre que (c.f. [A1]) :

$$R'_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log(M(\varphi)) + R_{\alpha\bar{\beta}} \tag{0.2.4}$$

où $M(\varphi) = \det(g'g^{-1})$. Finalement, le choix de $\lambda\omega$ dans la première classe de Chern implique l'existence d'une fonction $f \in C^\infty(X)$ telle que :

$$R_{\alpha\bar{\beta}} - \lambda g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha\bar{\beta}} f.$$

Ceci nous mène à une reformulation du problème 0.2.1 : Il s'agit de trouver $\varphi$ lisse sur $X$ telle que :

$$\log M(\varphi) = -\lambda\varphi + f \tag{0.2.5}$$

Une telle équation est de type *Monge-Ampère complexe*. Pour entreprendre la résolution de 0.2.5 dans le cas $C_1(X) < 0$ (qui correspond au cas $\lambda < 0$), Aubin [A] considère la famille d'équations :

$$(*)_t : \log M(\varphi) = \varphi + tf, \quad \varphi \text{ est } C^\infty g\text{-admissible}$$

et utilise la méthode de continuité.

Dans le cas de la première classe de Chern positive, et contrairement aux deux cas précédents, des obstructions à l'existence des métriques d'Einstein-Kähler ont été découvertes par Lichnnerowicz [L] (réductivité du groupe d'automorphisme, ie toute représentation linéaire est complètement réductible) et Futaki [F1] (existence d'un invariant lié aux champs de vecteurs holomorphes). Il s'agit donc de trouver des conditions sous lesquelles ces variétés admettent ou pas des métriques d'Einstein-Kähler. L'opérateur linéarisé des équations ci-dessus n'étant plus inversible dans le cas positif (un signe moins apparaît devant $\varphi$), Thierry Aubin introduit alors une nouvelle famille d'équations donnée par :

$$(**)_t : \log M(\varphi) = -t\varphi + f, \quad \varphi \text{ est } C^\infty g\text{-admissible.}$$

Les estimées à priori ramènent l'étude de l'existence de solution à la recherche de l'estimée $C^0$ de la suite de solutions $(\varphi)_t$ de l'équation $(**)_t$. Pour cette dernière estimée T. Aubin introduit un invariant holomorphe $\xi(X)$ dont la valeur permet de décider l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler sur $X$.

**Théorème 0.2.1** *(Aubin [A2]) Soit $(X, g)$ une variété Kählerienne compacte de dimension complexe $n$, de volume $V$ et à première classe de Chern positive. Considérons l'inégalité*

$$\int_X e^{-\varphi} dv \leq C \exp\left(\xi I(\varphi) - \frac{1}{V}\int_X \varphi \, dv\right) \tag{0.2.6}$$

*où $\varphi$ est $C^\infty$ g-admissible.* $I(\varphi) = \int_X \varphi(1 - M(\varphi))\, dv$, *et* $\omega = i g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \in C^1(X)$, $C$ *et* $\xi$ *étant des constantes positives. Posons :*

$$\xi_n(X) = \inf\{\xi > 0 \textit{ tel que } C \text{ existe dans } (0.2.6) \text{ pour les fonctions } \varphi\ C^\infty g\textit{-admissible}\}$$

*Alors si* $n(n+1)\xi_n V < 1$ *l'équation 0.2.5 admet une solution* $\lambda = 1$ *et* $X$ *admet une métrique d'Einstein-Kähler.*

Quelques années plus tard, se basant sur une inégalité de Hörmander [H] et sur les deux fonctionnelles introduites par Aubin dans le résultat précité, G.Tian [T] introduit un nouvel invariant holomorphe $\alpha(X)$, plus malléable en terme de calculs que celui d'Aubin, et dont l'estimation donne une condition d'existence de solution pour l'équation 0.2.1 (l'unicité au groupe d'automorphismes-près est démontrée par Bando et Mabushi dans [B-M]).

**Théorème 0.2.2** *(Tian [T]) Soit* $(X, g)$ *une variété Kählerienne compacte de dimension complexe* $n$, *de volume* $V$ *et à première classe de Chern positive. Considérons l'inégalité :*

$$\int_X e^{-\alpha\varphi} dv \leq C \exp\left(-\frac{\alpha}{V}\int_X \varphi\, dv\right) \tag{0.2.7}$$

*où* $\varphi$ *est* $C^\infty g$*-admissible et* $\alpha > 0$ *assez petit. Posons :*

$$\alpha(X) = \sup\{\alpha > 0,\ C \text{ existe dans } 0.2.7 \text{ pour les fonctions } \varphi\ C^\infty g\textit{-admissible}\}$$

*Alors dés que* $\alpha(X) > \dfrac{n}{n+1}$ *l'équation 0.2.5 admet une solution pour* $\lambda = 1$ *et* $X$ *admet une métrique d'Einstein-Kähler.*

Tian considère de plus un autre invariant $\alpha_G(X)$ pour les fonctions $C^\infty$ $g$-admissibles invariantes par un groupe d'automorphismes $G$.

**Théorème 0.2.3** *(Tian [T]) Soit* $(X, g)$ *une variété Kählerienne compacte de dimension complexe* $n$ *à* $C^1(X) > 0$.

$$\alpha_G(X) = \sup\{\alpha > 0,\ C \text{ existe dans } 0.2.7 \text{ pour les fonctions } \varphi\ C^\infty g\textit{-admissible}, G\textit{-invariante}\}$$

*Alors si* $\alpha_G(X) > \dfrac{n}{n+1}$, $X$ *admet une métrique d'Einstein-Kähler.*

S'appuyant sur l'évaluation de l'invariant de Tian, plusieurs constructions de métriques d'Einstein-Kähler ont été obtenues sur différents types de variétés de Fano. Le cas le plus simple a été traité par Yau et Tian ([T1] [T-Y] [T]) lui même, à savoir les variétés de dimensions deux, plus précisément deux cas particuliers des hypersurface de Fermat. Par la suite il a généralisé ce résultat pour des hypersurfaces de degré $n$ et $(n+1)$ de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Dans [R], Christophe Réal a montré l'existence de la métrique d'Einstein-Kähler sur le fibré projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ éclaté en $(n+1)$ points.

Par ailleurs, Ben Abdesselem et Pascal Cherrier ([B1] [B-C] [B-C-1]) se sont intéressés à la mise en évidence des métriques d'Einstein-Kähler sur certaines variétés de Fano, ainsi qu'au calcul de la constante de Tian sur celles qui par des obstructions de Futaki, n'en admettent pas. Ceci permet en effet, de donner une minoration du tenseur de Ricci en fonction du tenseur métrique (voir [B-C-2] et [B-C-3]).

Dans un second travail, Ben Abdesselem donne un "outil" pour le calcul de l'invariant de Tian sur les variétés de Fano. Il utilise l'aspect algébrique de ces dernières pour mettre en évidence une fonction "extrémale" minorant les fonctions $\varphi$ $C^\infty g$-admissible à sup nul, invariantes par un groupe d'automorphisme convenablement choisi, ramenant de ce fait le calcul de la constante de Tian à l'estimée de l'intégrale de l'exponentielle d'une seule fonction. Dans un premier article [B2], il étudie le cas torique le plus simple, à savoir celui de la sphère $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Une minoration similaire a été prouvée sur le projectif complexe [B3] ainsi que sur des variétés obtenues à partir de ce dernier par éclatements [B1] (voir aussi [B-D]) et par fibration [B-C-4]. Dans un travail récent [B-J], il prouve le résultat dans un cas de variété non torique : La grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$. En outre, le calcul de l'invariant de Tian pour la grassmannienne complexe $G_{p,q}\mathbb{C}$ (l'espace des $p$-plans dans $\mathbb{C}^{p+q}$) a déjà été établit par J.Grivaux en [G], moyennant une méthode qui s'appuie sur un groupe d'isométries opérant transitivement sur $G_{p,q}\mathbb{C}$ ainsi qu'un plongement naturel de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^p$ dans $G_{p,q}\mathbb{C}$.

Notre but dans le second article **"Enveloppe inférieure de fonctions admissibles sur la grassmanniennes $\mathbf{G_{m,nm}}(\mathbb{C})$"** est de généraliser le résultat obtenu par Ben Abdesselem sur la grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$. On montre que les fonctions $\varphi \in C^\infty(G_{m,nm}(\mathbb{C})$, $g$-admissibles, invariantes par un groupe d'automorphismes adéquat $G$, à sup nul, sont minorées par une fonction extrémale $\psi$ tendant vers l'infini sur le bord des cartes usuelles de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$.

**Théorème 0.2.4** *Soit* $\varphi \in C^{\infty}(G_{m,nm}(\mathbb{C}))$ *une fonction* $g$*-admissible et* $G$*-invariante, vérifiant* $\sup_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} \varphi = 0$ *. Alors on a :* $\varphi \geq \psi$.

Cette minoration permet de trouver une constante de Tian plus grande que celle calculées dans [G].

**Théorème 0.2.5** $\forall \alpha < \dfrac{1}{m}$, *on a l'inégalité de type Tian-Hormander suivante (Voir [H], [T]) :*

$$\int_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\varphi} dv \leqslant Cst$$

*pour toute fonction* $\varphi \in C^{\infty}(G_{m,nm}(\mathbb{C}))$, $g$*-admissible et* $G$*-invariante vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur* $G_{m,nm}(\mathbb{C})$.

Le chapitre 3 est consacré à la démonstration de ces deux résultats.

# Chapitre 1

# Structures Finslériennes complexes : Préliminaires et généralités

Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang $r$ au dessus d'une variété complexe $X$ de dimension $n$. $E$ est négatif au sens de Griffiths si pour tout vecteur décomposable non nul $U = Y \otimes s \in T^{1,0}X \otimes E$, la forme de courbure

$$\theta_E(U,U) = \theta_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} Y^{\alpha} Y^{\bar{\beta}} s^i s^{\bar{j}} \tag{1.0.1}$$

est définie négative. Les $\theta_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$ sont les cœfficients de la courbure Hermitienne de Chern du fibré $E$. En [K2] et [K3], Kobayashi a revisité la notion de négativité d'un fibré vectoriel holomorphe $E$ sous un aspect plus géométrique, faisant appel aux structures Finslériennes complexes $F$ et prouve qu'un fibré vectoriel holomorphe $E$ est négatif si et seulement si il admet une structure Finslérienne $F$ strictement pseudoconvexe à courbure négative.

Le présent chapitre comporte deux volets. Le premier consiste à rappeler rapidement la technique utilisée par Kobayashi pour définir les notions classiques en géométrie Finslérienne complexe. En particulier nous présentons les principaux théorèmes traitant la négativité d'un fibré vectoriel holomorphe dans le cas Finslérien tout en mettant en évidence le lien avec le cas hermitien.

Le deuxième consiste à reprendre les calculs de Kobayashi dans un autre cadre en considérant le pull-back du fibré initial au dessus du fibré lui-même privé de sa section nulle, à la place du fibré tautologique $L(E)$ au dessus de $\mathbb{P}(E)$. D'autre part, nous effectuons les différents calculs des structures Finslériennes complexes (connexion, courbure,..) dans une nouvelle base s'adaptant à la décomposition de $T^{1,0}E^0$ en sous-fibré vertical et horizontal. Ceci illustre d'une manière plus explicite l'approche développée dans [A-P] et dans [A4]. De plus, une même définition de la négativité d'un fibré vectoriel holomorphe $E$ muni d'une métrique Finslérienne $F$ que celle donnée par Kobayashi, nous permet de retrouver l'équivalent de son théorème sur le nouveau fibré considéré. Ce chapitre résume les différentes notions fondamentales de la géométrie Finslérienne complexe telle qu'elles sont présentés par ces auteurs. Nous développerons les calculs nécessaires pour la compréhension du prochain chapitre.

## 1.1 Théorèmes de Kobayashi

### 1.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.1.1** *Une structure finslérienne complexe sur un fibré vectoriel holomorphe $E$ est la donnée d'une fonction continue $F : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

- $F^2$ *est* $C^\infty$ *sur* $E^0 = E \setminus \{0_E\}$.
- $F(z, \eta) > 0$ *pour tout* $z \in X$ *et* $\eta \in E$.
- $F$ *est fortement homogène en* $\eta$ : $F(z, \lambda\eta) = |\lambda| F(z, \eta)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $F$ *est fortement pseudoconvexe, c'est à dire que la matrice Hermitienne d'ordre* $n$

$$G_{i\bar{j}}(z, \eta) = \left( \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^i \partial \overline{\eta}^j}(z, \eta) \right)_{1 \le i,j \le r} \tag{1.1.1}$$

*est définie positive sur* $E^0$.

La grandeur $G_{i\bar{j}}(z, \eta)$ introduite en 1.1.1 est appelée tenseur fondamental de la métrique Finslérienne complexe $F$. C'est une fonction qui dépend non seulement de la variable de base mais aussi de celle de la fibre. En outre, $G_{i\bar{j}}(z, \eta)$ est homogène de degré zéro en $\eta$ : $G_{i\bar{j}}(z, \lambda\eta) = G_{i\bar{j}}(z, \eta)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Remarque 1.1.1**

1. *Si le tenseur fondamental de la métrique Finslérienne ne dépend que de la variable de base $z$ ($G_{i\bar{j}}(z, \eta) = G_{i\bar{j}}(z)$) alors $F$ est une métrique Hermitienne.*

2. *Si le tenseur fondamental de la métrique Finslérienne ne dépend que de la variable de la fibre $\eta$ ($G_{i\bar{j}}(z, \eta) = G_{i\bar{j}}(\eta)$) alors $F$ est une norme de Minkowski sur chaque fibre $E_z$.*

Dans ce qui suit (chapitres 1 et 2), les indices latins font référence aux variables de la fibre et les indices grecs à celles relatives à la base. Nous adopterons aussi les notations suivantes :

- $G(z,\eta) = F^2(z,\eta)$, $G_i = \dfrac{\partial G}{\partial \eta^i}$, $G_{\bar{j}} = \dfrac{\partial G}{\partial \bar{\eta}^j}$.
- $G_{i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$, $G_{i\bar{j}\bar{l}} = \dfrac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^l}$, $G_{i\alpha} = \dfrac{\partial G_i}{\partial z^\alpha}$, $G_{i\bar{j}\bar{\beta}} = \dfrac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\beta}$.

Le tenseur fondamental de la métrique Finslérienne possède des propriétés de dérivations par rapport à la variable de base $z \in X$ et celle de la fibre $\eta \in E_z$, nécessaires pour le calcul de la connexion et la courbure Finslérienne complexe. Ces propriétés sont une conséquence directe de la $(1,1)$-homogénéité de la fonction $G$ :

$$G(z,\lambda\eta) = \lambda\bar{\lambda}G(z,\eta) \tag{1.1.2}$$

En effet, en dérivant l'équation 1.1.2 par rapport à $\lambda$ et $\bar{\lambda}$, on obtient :

$$G_i(z,\lambda\eta)\eta^i = \bar{\lambda}G(z,\eta) \tag{1.1.3}$$
$$G_{\bar{j}}(z,\lambda\eta)\bar{\eta}^j = \lambda G(z,\eta) \tag{1.1.4}$$

On dérive l'équation 1.1.3 par rapport à $\bar{\eta}^j$ et l'équation 1.1.4 par rapport à $\eta^i$, il résulte que :

$$G_{i\bar{j}}(z,\lambda\eta)\eta^i = G_{\bar{j}}(z,\eta) \tag{1.1.5}$$
$$G_{i\bar{j}}(z,\lambda\eta)\bar{\eta}^j = G_i(z,\eta) \tag{1.1.6}$$

Par conséquent les équations 1.1.4 et 1.1.6 donnent :

$$G_{i\bar{j}}(z,\eta)\eta^i\bar{\eta}^j = G(z,\eta) \tag{1.1.7}$$

On dérive l'équation 1.1.3 par rapport à $\eta^k$ et l'équation 1.1.4 par rapport à $\bar{\eta}^l$, on obtient :

$$G_{ik}(z,\lambda\eta)\lambda\eta^i + G_k(z,\lambda\eta) = \bar{\lambda}G_k(z,\eta) \tag{1.1.8}$$
$$G_{\bar{j}\bar{l}}(z,\lambda\eta)\bar{\lambda}\bar{\eta}^j + G_{\bar{l}}(z,\lambda\eta) = \lambda G_{\bar{l}}(z,\eta) \tag{1.1.9}$$

Pour $\lambda = 1$ dans les équations 1.1.8 et 1.1.9, on a :

$$G_{ik}(z,\eta)\eta^i = 0, \quad G_{\bar{j}\bar{l}}(z,\eta)\bar{\eta}^j = 0 \tag{1.1.10}$$

Une dérivation de l'équation 1.1.5 par rapport à $\eta^k$ et de l'équation 1.1.6 par rapport à $\bar{\eta}^l$ donne :

$$G_{i\bar{j}k}(z,\lambda\eta)\lambda\eta^i + G_{k\bar{j}}(z,\lambda\eta) = G_{k\bar{j}}(z,\eta) \tag{1.1.11}$$

$$G_{i\bar{j}\bar{l}}(z,\lambda\eta)\lambda\bar{\eta}^j + G_{i\bar{l}}(z,\lambda\eta) = \lambda G_{i\bar{l}}(z,\eta) \tag{1.1.12}$$

Et pour $\lambda = 1$ dans 1.1.11 et 1.1.12 on obtient :

$$G_{i\bar{j}k}(z,\eta)\eta^i = 0, \quad G_{i\bar{j}\bar{l}}(z,\eta)\bar{\eta}^j = 0 \tag{1.1.13}$$

Pour une dérivation de l'équation 1.1.13 par rapport $z^\alpha$ et $\bar{z}^\beta$ on a :

$$G_{i\bar{j}k\bar{\beta}}(z,\eta)\eta^i = 0, \quad G_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}(z,\eta)\bar{\eta}^j = 0 \tag{1.1.14}$$

### 1.1.2 Connexion et courbure Finslérienne complexe

Soit $X$ une variété complexe compacte de dimension $n$ et $\pi : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang $r \geq 2$ au dessus de $X$. On considère l'action multiplicative fibre par fibre de $\mathbb{C}^*$ sur $E$. Le projectivisé des droites du fibré $E$ est l'espace quotient

$$\mathbb{P}(E) = (E \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

muni de la projection naturelle $\tilde{p} : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$. C'est une variété complexe de dimension $(n + r - 1)$. Les points de $\mathbb{P}(E)$ sont donc identifiés aux couples $(z, [\eta])$ où $z \in X$ et $[\eta]$ est la droite complexe de $E_z$ engendré par le vecteur $\eta \in E_z^0$.

Soit $p^{-1}E$ le pul-back du fibré $E$ au dessus de $\mathbb{P}(E)$. Le fibré tautologique $L(E)$, sous-fibré vectoriel de $p^{-1}E$, est défini par :

$$L(E) = \bigcup_{(z,[\eta])\in\mathbb{P}(E)} L(E)|_{(z,[\eta])}$$

où

$$L(E)|_{(z,[\eta])} = \{Z \in E_z | Z \in \mathbb{C}.\eta\} = p^{-1}E|_{(z,[\eta])}$$

Nous résumons la construction par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L(E) \subset p^{-1}(E) \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}(E) \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Soit $(z^1, ..., z^n)$ un système de coordonnées locales sur $X$ et $(z^1, ..., z^n; \eta^1, ..., \eta^r)$ un système de coordonnées locales sur la fibre $E_z$ défini par une base de section locales holomorphe $(e_1(z), ..., e_r(z))$. $(z, [\eta], Z) = (z^1, ..., z^n; [\eta^1, ..., \eta^r]; Z^1, ..., Z^r)$ est un système de coordonnés locales holomorphe de $p^{-1}E|_{(z,[\eta])}$ défini par une base de section locales $(\tilde{e}_1(z, [\eta]), ..., \tilde{e}_r(z, [\eta]))$, pull-back de $(e_1(z), ..., e_r(z))$ par $p$. Par définition du fibré tautologique, $(z, [\eta], \eta) = (z^1, ..., z^n; [\eta^1, ..., \eta^r]; \eta^1, ..., \eta^r)$ est alors un système de coordonnées locales holomorphe de $L(E)|_{(z,[\eta])}$. Il existe un biholomorphisme entre $L(E)$ privé de sa section nulle $\mathbb{P}(E) \times \{0_E\}$ et $E^0$. Ce biholomorphisme est donné par l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : E^0 & \longrightarrow & L(E) \setminus (\mathbb{P}(E) \times \{0_E\}) \\ (z, \eta) & \longmapsto & (z, [\eta], \eta) \end{array} .$$

Par conséquent une structure Hermitienne $h$ sur $L(E)$ définit une structure Finslérienne $F$ sur $E$. En outre, si $\|\eta\|_E = \sqrt{h(\phi(\eta))}$ désigne la norme associée à $h$ pour tout $\eta \in E^0$, par continuité de la norme on peut étendre cette définition sur tout le fibré $E$ et la métrique Finslérienne $F$ sur $E$ est alors donnée par $F(z, \eta) = \|\eta\|_E$.

Réciproquement si $E$ est muni d'une métrique Finslérienne $F$, le tenseur fondamental $G_{i\bar{j}}$ définit une métrique Hermitienne sur $p^{-1}E$, étant donné qu'il est invariant le long de la fibre $p^{-1}E|_{(z,[\eta])}$ $(G_{i\bar{j}}(z, \lambda\eta) = G_{i\bar{j}}(z, \eta))$ et est défini positif.

Le fibré vectoriel holomorphe $p^{-1}E$, muni de sa métrique Hermitienne donnée par la métrique Finslérienne $F$, admet une unique connexion Hermitienne de type $(1, 0)$. Cette connexion est nommée connexion Finslérienne complexe pour le fibré $(E, F)$. Il est bien clair que la connexion Finslérienne complexe n'agit pas directement sur le fibré $E$ muni de sa structure Finslérienne mais sur son pull-back $p^{-1}E$ dont la base est le fibré projectif $\mathbb{P}(E)$. En effet, l'idée de base en géométrie Finslérienne est de transférer le fibré initial $E$ vers un autre fibré Hermitien puis y appliquer les techniques classiques de la géométrie Hermitienne et les lire en termes de structures Finslériennes.

Les cœfficients de la connexion Finslérienne sont donnés dans la base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i} \right\}_{1 \le \alpha \le n,\ 1 \le i \le r}$ du fibré $T^{1,0}\mathbb{P}(E)$ par :

$$\Gamma^i_{j\alpha} = G^{i\bar{h}} \frac{\partial G_{j\bar{h}}}{\partial z^\alpha}, \quad C^i_{jk} = G^{i\bar{h}} \frac{\partial G_{j\bar{h}}}{\partial \eta^k} \tag{1.1.15}$$

où $\left(G^{i\bar{h}}(z, \eta)\right)_{1 \le i,h \le r}$ est la matrice inverse de $(G_{i\bar{h}}(z, \eta))_{1 \le i,h \le r}$. Par conséquent la matrice de la connexion Finslérienne complexe s'écrit :

$$\Upsilon^i_j = G^{i\bar{k}} \partial G_{j\bar{k}} = \Gamma^i_{j\alpha} dz^\alpha + C^i_{jk} d\eta^k \tag{1.1.16}$$

Ainsi, la matrice de la courbure Finslérienne complexe $\Omega = (\Omega^i_j)$ de la connexion $\Upsilon = (\Upsilon^i_j)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \Omega^i_j &= \bar{\partial}\Upsilon^i_j && (1.1.17) \\ &= R^i_{j\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + P^i_{j\alpha\bar{l}}dz^\alpha \wedge \delta\bar{\eta}^l + P^i_{jk\bar{\beta}}\delta\eta^k \wedge d\bar{z}^\beta + Q^i_{jk\bar{l}}\delta\eta^k \wedge \delta\bar{\eta}^l && (1.1.18) \end{aligned}$$

où

$$R^i_{j\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{z}^\beta}, \qquad P^i_{j\alpha\bar{l}} = -\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{\eta}^l} \tag{1.1.19}$$

$$P^i_{kj\bar{\beta}} = -\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{z}^\beta}, \qquad Q^i_{kj\bar{l}} = -\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l} \tag{1.1.20}$$

En utilisant les propriétés du tenseur fondamental rappelées dans la section précédente, on obtient :

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}\eta^i\bar{\eta}^j = -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}^\beta\partial z^\alpha} + G^{h\bar{l}}\frac{\partial G_{h\bar{j}}}{\partial\bar{z}^\beta}\frac{\partial G_{i\bar{l}}}{\partial z^\alpha} \tag{1.1.21}$$

$$P_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\bar{\eta}^j = P_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\bar{\eta}^l = 0 \tag{1.1.22}$$

$$P_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^i = P_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^k = 0 \tag{1.1.23}$$

$$Q_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^i = Q_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^k = 0 \tag{1.1.24}$$

Pour toute section $Z$ de $p^{-1}E$, la forme Hermitienne $\psi$ sur $p^{-1}E$ définie par

$$\begin{aligned} \psi(z,\eta,Z) &= R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}Z^i\bar{Z}^j dz^\alpha d\bar{z}^\beta + P_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}Z^i\bar{Z}^j dz^\alpha d\eta^{\bar{l}} \\ &+ P_{i\bar{j}k\bar{\beta}}Z^i\bar{Z}^j d\eta^k d\bar{z}^\beta + Q_{i\bar{j}k\bar{l}}Z^i\bar{Z}^j d\eta^k d\eta^{\bar{l}} \end{aligned}$$

est égale à

$$\psi(z,\eta,\eta) = R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}\eta^i\bar{\eta}^j dz^\alpha d\bar{z}^\beta \tag{1.1.25}$$

sur le fibré tautologique $L(E) \subset p^{-1}E$. $(E,F)$ est négatif dés que $\psi(z,\eta,\eta)$ est définie négative. Par conséquent on a :

**Théorème 1.1.1** *(Kobayashi [K2]) Soit $F$ une métrique Finslérienne complexe sur $E$ et $h$ la métrique Hermitienne correspondante sur $L(E)$. Alors $F$ est à courbure négative si et seulement si $h$ est à courbure négative.*

**Théorème 1.1.2** *(Kobayashi [K2]) Un fibré vectoriel holomorphe $E$ au dessus d'une variété complexe $X$ est négatif si et seulement si il admet une métrique Finslérienne strictement pseudoconvexe à courbure négative.*

Remarquons que la négativité d'un fibré vectoriel $(E, F)$ au sens de Kobayashi est issue essentiellement de la définition de négativité au sens de Griffiths en appliquant celle ci au fibré tautologique $L(E)$ muni de sa métrique Hermitienne issue de $F$. En effet la difficulté majeure de la conjecture de Griffiths est de construire une métrique Hermitienne sur $E$ à partir d'une métrique Hermitienne sur le fibrè $L(E)$. Néanmoins grâce au biholomorphisme $\phi$, il y a une manière naturelle pour passer d'une métrique Hermitienne sur $L(E)$ à une métrique Finslérienne sur $E$. Par conséquent il y a équivalence entre la négativité du fibré $E$ et de son fibré tautologique $L(E)$.

## 1.2 Structures Finslériennes complexes

Notre objectif dans cette section est de reprendre les calculs de Kobayashi dans un autre cadre. En particulier nous remplaçons $\mathbb{P}(E) \to X$ par $E^0 \to X$, ainsi $p^{-1}E \to \mathbb{P}(E)$ est remplacé par $\pi^{-1}E \to E^0$.

Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang $r \geq 2$ au dessus d'une variété complexe $X$ de dimension $n$. Soient

$$\begin{array}{rcl} v_\alpha \ : \pi^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\ (z, \eta) & \longmapsto & (z^1, ..., z^n; \eta^1, ..., \eta^r) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} v_\beta \ : \pi^{-1}(U_\beta) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\ (z, \eta) & \longmapsto & (\widehat{z}^1, ..., \widehat{z}^n; \widehat{\eta}^1, ..., \widehat{\eta}^r) \end{array}$$

deux trivialisations locales du fibré $E$ relatives aux deux cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et $(U_\beta, \varphi_\beta)$ de la variété $X$. On obtient ainsi un biholomorphisme

$$\begin{array}{rcl} v_\beta \circ v_\alpha^{-1} \ : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \\ (z, \eta) & \longmapsto & (z, \psi^i_j \eta) \end{array}$$

où les $\psi^i_j \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ sont les fonctions de transitions holomorphes du fibré $E$. Le changement de coordonnées sur $E$ est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{z}^\beta &= \widehat{z}^\beta(z^1, ..., z^n) \\ \widehat{\eta}^i &= \psi^i_j \eta^j, \ \ \text{rang } \psi^i_j = r \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Le pull-back du fibré $E$, $\pi^{-1}E \to E^0$, dont la base est le fibré $E$ privée de sa section nulle $E^0 = E\backslash\{0_E\}$, peut être décrit comme une collection de la fibre $E_z$ en chaque point de la base $E^0$. Plus explicitement, au dessus de tout point $p = (z, \eta) \in E^0$, la fibre $\pi^{-1}E|_{(z,\eta)}$ est définie par :

$$\pi^{-1}E|_{(z,\eta)} = E_{\pi(z,\eta)} = E_z$$

comme schématisé par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}E \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tau"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
E^0 \arrow[r, "\pi"] & X
\end{tikzcd}$$

Dans la suite, nous désignons par $T^{1,0}X$ le fibré tangent holomorphe associé à la variété $X$ et $T^{0,1}X$ le conjugué de $T^{1,0}X$. De même $T^{1,0}E^0$ représente le fibré tangent holomorphe associé au fibré $E^0$ et $T^{0,1}E^0$ son conjugué :

$$T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X, \;\; T_{\mathbb{C}}E^0 = TE^0 \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}E^0 \oplus T^{0,1}E^0$$

On note aussi par $\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2$, etc.. les sections du fibré $\pi^{-1}E$. Quant aux champs de vecteurs de fibré $T^{1,0}E^0$, ils sont désignés par $Y$, $W$, etc..

Soit $(e_1(z), ..., e_r(z))$ une base de sections locales holomorphes de $E$. Étant donné qu'en tout point $(z, \eta)$ de $E^0$, la fibre $\pi^{-1}E|_{(z,\eta)}$ est égale à $E_z$, la base $(e_i(z))_{1\leq i\leq r}$ induit une base de sections locales sur $\pi^{-1}E$ définie comme suit :

$$\tilde{e}_i(z, \eta) = (\eta, e_i(\pi(z))), \text{ où } 1 \leq i \leq r.$$

En considérant le système de coordonnées holomorphes $(z^1, ..., z^n, \eta^1, ..., \eta^r)$ sur $E^0$, $\{\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}, 1 \leq \alpha \leq n;\ 1 \leq i \leq r\}$ est une base de sections locales de $T^{1,0}E^0$.

Le fibré $\pi^{-1}E$ admet aussi une section holomorphe $\sigma : E^0 \to \pi^{-1}E$ nommée la section de Liouville et définie par :

$$\sigma(z, \eta) = (z, \eta, \eta).$$

On munit $E$ d'une structure Finslérienne complexe $F$ strictement pseudoconvexe , alors le tenseur fondamental $G_{i\bar{j}}$ définit une métrique Hermitienne $\tilde{g}$ sur le fibré pull-back $\pi^{-1}E$.

En effet, pour toute section $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_1^i(z,\eta)\tilde{e}_i$ et $\tilde{s}_2 = \tilde{s}_2^i(z,\eta)\tilde{e}_i$ de $\pi^{-1}E$ on a :

$$\tilde{g}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = G_{i\bar{j}}(z,\eta)\tilde{s}_1^i\bar{\tilde{s}}_2^j \tag{1.2.2}$$

Pour la section de Liouville $\sigma$ on vérifie que : $\tilde{g}(\sigma,\sigma) = G_{i\bar{j}}(z,\eta)\eta^i\bar{\eta}^j = G(z,\eta) = ||\sigma||^2_{\tilde{g}}$.

### 1.2.1 Distribution horizontale HE dans $T^{1,0}E^0$

Grâce à l'application linéaire tangente $\pi_* : T^{1,0}E^0 \to T^{1,0}X$ vérifiant :

$$\pi_*(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}) = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}|_z, \quad \pi_*(\frac{\partial}{\partial \eta^i}) = 0$$

nous définissons le sous-fibré vertical $VE$ comme étant le noyau de $\pi_*$

$$VE = \ker \pi_* \subset T^{1,0}E^0$$

Ainsi, $VE$ est un sous-fibré vectoriel holomorphe de $T^{1,0}E^0$, et en tout point $p = (z,\eta) \in E^0$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \eta^i}, 1 \leq i \leq r\right\}$ est une base de sections locales holomorphes de $VE$. Étant donné l'isomorphisme entre $VE$ et $\pi^{-1}E$ , la section de Liouville $\sigma$ peut aussi être considérée comme une section du fibré $VE$.

Construisons maintenant un supplémentaire $HE$ à $VE$ dans $T^{1,0}E^0$. Rappelons que le choix d'un tel supplémentaire correspond à la donnée d'une connexion. Une fois ce choix fixé, un changement de coordonnées dans la variété $X$ fait apparaître des termes "parasites" attendus comme le montre le calcul suivant : En effet, supposons $Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \in HE$ alors

$$\begin{aligned}
\widehat{Y} &= \widehat{Y}^\beta \frac{\partial}{\partial \widehat{z}^\beta} \\
\widehat{Y} &= \widehat{Y}^\beta \left\{ \frac{\partial z^\alpha}{\partial \widehat{Y}^\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \eta^j}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial \eta^j} \right\} \\
&= \widehat{Y}^\beta \frac{\partial z^\alpha}{\partial \widehat{z}^\beta}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \widehat{Y}^\beta \widehat{\eta}^i \frac{\partial \psi_j^i}{\partial \widehat{z}^\beta}\frac{\partial}{\partial \eta^j}
\end{aligned}$$

ainsi $HE$ n'est pas engendré par $\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, 1 \leq \alpha \leq n\right\}$ (on voit ici le terme "parasite" dû au fait que la quantité n'est pas intrinsèque). Effectuons maintenant une construction annexe sur le fibré $\pi^{-1}E$ afin de trouver un supplémentaire à $VE$ dans $T^{1,0}E^0$.

On note par $\mathcal{A}^k(\pi^{-1}E)$, l'ensemble des $k$-formes de classe $C^\infty$ définie sur $E^0$ à valeurs dans $\pi^{-1}E$. L'ensemble $\mathcal{A}^0(\pi^{-1}E)$ de sections de classe $C^\infty$ de $\pi^{-1}E$ sera noté simplement $\mathcal{A}(\pi^{-1}E)$. Soit $\nabla : \mathcal{A}(\pi^{-1}E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(\pi^{-1}E)$ la connexion $\mathbb{C}$-linéaire définie sur $(\pi^{-1}E, \tilde{g})$. On a :

$$\nabla(f\tilde{s}) = df \otimes \tilde{s} + f\nabla\tilde{s} \tag{1.2.3}$$

pour toute section $\tilde{s}$ de $\pi^{-1}E$ et toute fonction $f \in C^\infty(E^0)$.

La décomposition $T_{\mathbb{C}}E^0 = T^{1,0}E^0 \oplus T^{0,1}E^0$ de $T_{\mathbb{C}}E^0$ induit une décomposition de $\mathcal{A}^1(\pi^{-1}E)$ de la forme $\mathcal{A}^1(\pi^{-1}E) = \mathcal{A}^{1,0}(\pi^{-1}E) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\pi^{-1}E)$. Par conséquent, on obtient deux nouveaux opérateurs :

$$\nabla^{1,0} : \mathcal{A}(\pi^{-1}E) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}(\pi^{-1}E)$$

et

$$\nabla^{0,1} : \mathcal{A}(\pi^{-1}E) \longrightarrow \mathcal{A}^{0,1}(\pi^{-1}E)$$

tels que, pour toute section $\tilde{s} \in \pi^{-1}E$, on ait :

$$\nabla\tilde{s} = \nabla^{1,0}\tilde{s} \oplus \nabla^{0,1}\tilde{s} \tag{1.2.4}$$

avec

$$\nabla^{1,0} = d^{1,0} + A^{1,0} \quad \text{et} \quad \nabla^{0,1} = d^{0,1} + A^{0,1} \tag{1.2.5}$$

où

$$\begin{cases} d^{1,0}f &= \dfrac{\partial f}{\partial z^\alpha}dz^\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial \eta^i}d\eta^i, \quad \forall f \in C^\infty(E^0) \\ d^{0,1}f &= \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha}d\bar{z}^\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\eta}^i}d\bar{\eta}^i, \quad \forall f \in C^\infty(E^0) \end{cases}$$

et où $A^{1,0}$ (respectivement $A^{0,1}$) représente une matrice de 1-formes de classe $C^\infty$ dans $(T^{1,0}E^0)^*$ (respectivement dans $(T^{0,1}E^0)^*$).

$(\pi^{-1}E, \tilde{g})$ étant un fibré vectoriel holomorphe Hermitien, il admet alors une unique connexion Hermitienne de type $(1,0)$ : $\nabla = \nabla^{1,0} + d^{0,1}$, nommée connexion de Chern. En revanche contrairement au cas Hermitien classique, il y a des cœfficients de dérivation par rapport à la variable de la fibre qui s'ajoutent. La connexion de Chern $\nabla$ sur $(\pi^{-1}E, \tilde{g})$ permet de définir une connexion Finslérienne complexe sur $(E, F)$.

**Définition 1.2.1** *[A-P] La connexion Hermitienne de type* $(1,0)$ *sur le fibré* $(\pi^{-1}E, \tilde{g})$ *est nommée connexion Finslérienne de Chern pour le fibré* $(E, F)$.

La connexion de Chern sur $(\pi^{-1}E, \tilde{g})$ permet de définir un supplémentaire à $VE$ dans $T^{1,0}E^0$ moyennant l'application surjective $\mu$ de classe $C^\infty$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mu : T^{1,0}E^0 & \longrightarrow & \pi^{-1}E \\ Z & \longmapsto & \nabla_Z^{1,0}\sigma \end{array}$$

Localement, pour un champ de vecteur $Z = Z^\alpha(z,\eta)\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha} + L^i(z,\eta)\dfrac{\partial}{\partial \eta^i}$ de $T^{1,0}E^0$ et $\sigma(z,\eta) = \eta^i \tilde{e}_i(z,\eta)$ la section de Liouville de $\pi^{-1}E$, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_Z^{1,0}\sigma &= Z^\alpha(z,\eta)\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\sigma + L^i(z,\eta)\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^i}}\sigma \\ &= Z^\alpha(z,\eta)\left\{\frac{\partial \eta^j}{\partial z^\alpha} + \eta^j\left(\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\tilde{e}_j\right)\right\} + L^i(z,\eta)\left\{\frac{\partial \eta^j}{\partial \eta^i} + \eta^j\left(\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^i}}\tilde{e}_j\right)\right\} \end{aligned}$$

où

$$\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\tilde{e}_j = \Gamma^i_{j\alpha}(z,\eta)\tilde{e}_i, \quad \nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^i}}\tilde{e}_j = C^i_{jk}(z,\eta)\tilde{e}_i. \tag{1.2.6}$$

Les $\Gamma^i_{j\alpha}$ et $C^i_{jk}$ ne sont autres que les coefficients de la connexion Finslérienne complexe calculés par Kobayashi. Les $C^i_{jk}$ vérifient bien la relation de symétrie $C^i_{jk} = C^i_{kj}$. Ainsi, on peut en déduire que $F$ est une métrique Hermitienne si seulement si les $C^i_{jk}$ sont nuls. Moyennant l'équation 1.1.13 on obtient $\eta^i C^k_{ij} = 0$. Ainsi :

$$\nabla_Z^{1,0}\sigma = \left\{L^k(z,\eta) + Z^\alpha(z,\eta)\eta^j\Gamma^k_{j\alpha}(z,\eta)\right\}\tilde{e}_k(z,\eta) \tag{1.2.7}$$

Posons :

$$N^i_\alpha = \eta^j\Gamma^i_{j\alpha} \tag{1.2.8}$$

Les formes linéaires $N^i_\alpha$ ainsi définies sur $E^0$ sont nommées les cœfficients de la connexion non linéaire sur $E$. Elles sont homogènes de degré zéro par rapport à la variable de la fibre : $N^i_\alpha(z,\lambda\eta) = \lambda N^i_\alpha(z,\eta),\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

**Définition 1.2.2** *Soit* $\nabla$ *la connexion de Chern définie sur le fibré pull-back* $\pi^{-1}E$.
$HE = \ker\mu$ *définit un sous-fibré horizontal de classe* $C^\infty$ *supplémentaire à* $VE$ *dans* $T^{1,0}E^0$.
*Ainsi :* $T^{1,0}E^0 = HE \oplus VE$.

L'application $\mu$ est surjective donc $HE$ est bien de dimension $n$. De plus, la restriction de $\mu$ sur $VE$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels par conséquent si $Z \in HE \cap VE$ alors $Z \in Ker\mu|_{VE}$ et par suite $Z = 0$. Les quantités :

$$\frac{\delta}{\delta z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - N_\alpha^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \tag{1.2.9}$$

forment une base de sections locales du sous-fibré horizontal $HE$. Suivant le changement de coordonnées 1.2.1, les $\dfrac{\delta}{\delta z^\alpha}$ se transforment de la façon suivante :

$$\frac{\delta}{\delta z^\alpha} = \frac{\partial \hat{z}^\nu}{\partial z^\alpha} \frac{\delta}{\delta \hat{z}^\nu}. \tag{1.2.10}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \hat{z}^\nu}{\partial z^\alpha} \hat{N}_\nu^k = \psi_i^k N_\alpha^i - \frac{\partial \psi_i^k}{\partial z^\alpha} \eta^i. \tag{1.2.11}$$

Pour les co-vecteurs nous avons :

$$\delta \eta^i = d\eta^i + N_\alpha^i dz^\alpha. \tag{1.2.12}$$

Ainsi $\left\{ \dfrac{\delta}{\delta z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i} \right\}_{1 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i \leq r}$ forment une base de $T^{1,0}E^0$, et $\left\{ dz^\alpha, \delta\eta^i, \right\}_{1 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i \leq r}$ est une base de son dual $(T^{1,0}E^0)^*$. A présent, notre but est d'exprimer les cœfficients de la connexion Finslérienne de Chern dans cette nouvelle base.

## 1.2.2 Connexion Finslérienne de Chern

Soit $f : E^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^\infty$. La différentielle de $f$ relativement à la base $\left\{ \dfrac{\delta}{\delta z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}, 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq i \leq r \right\}$ de $T^{1,0}E^0$ est définie par :

$$d^{1,0} f = \frac{\delta f}{\delta z^\alpha} dz^\alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta^i} \delta \eta^i \tag{1.2.13}$$

Soit $Z = Z^\alpha(z,\eta) \dfrac{\delta}{\delta z^\alpha} + L^i(z,\eta) \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}$ un champ de vecteurs de $T^{1,0}E^0$ et $\tilde{s} = \tilde{s}^i(z,\eta)\tilde{e}_i$ une section du fibré $\pi^{-1}E$. La connexion linéaire $\nabla^{1,0}$ vérifie la formule de Leibniz, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla^{1,0}_Z \tilde{s} &= Z^\alpha(z,\eta)\nabla^{1,0}_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\tilde{s} + L^i(z,\eta)\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^i}}\tilde{s}\\ &= Z^\alpha(z,\eta)\left\{\frac{\delta \tilde{s}^j}{\delta z^\alpha} + \tilde{s}^j\left(\nabla^{1,0}_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\tilde{e}_j\right)\right\} + L^i(z,\eta)\left\{\frac{\partial \tilde{s}^j}{\partial \eta^i} + \tilde{s}^j\left(\nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^i}}\tilde{e}_j\right)\right\}.\end{aligned}$$

Or $\nabla^{1,0}_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\tilde{e}_j$ est une section de $\pi^{-1}E$, ceci prouve l'existence des fonctions $\gamma^j_{i\alpha} : E^0 \to \mathbb{C}$ de classe $C^\infty$ telles que

$$\nabla^{1,0}_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\tilde{e}_i = \gamma^j_{i\alpha}(z,\eta)\tilde{e}_j, \quad \text{et} \quad \nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^k}}\tilde{e}_i = C^j_{ik}(z,\eta)\tilde{e}_j. \tag{1.2.14}$$

Par conséquent, la matrice de 1-forme $A^{1,0} = (A^k_j)$ de la connexion est donnée par

$$A^k_j = \gamma^k_{j\alpha} dz^\alpha + C^k_{ij}\delta\eta^i. \tag{1.2.15}$$

Ainsi

$$\nabla^{1,0}\tilde{s} = d^{1,0}\tilde{s} + A^{1,0}\tilde{s}. \tag{1.2.16}$$

La connexion de Chern est compatible avec la métrique Hermitienne ainsi définie sur $\pi^{-1}E$ à partir de la métrique Finslérienne sur $E$. Par conséquent la condition

$$d\tilde{g}(s,t) = \tilde{g}(\nabla s, t) + \tilde{g}(s, \nabla t) \tag{1.2.17}$$

donne :

$$d^{1,0}G_{i\bar{j}} + d^{0,1}G_{i\bar{j}} = G_{i\bar{j}}A^i_k + G_{i\bar{j}}\bar{A}^i_k.$$

Comme la matrice de la connexion est de type $(1,0)$, on conclut $d^{1,0}G_{i\bar{j}} = G_{i\bar{j}}A^i_k$ et par suite $A^i_k = G^{\bar{j}i}d^{1,0}G_{\bar{j}k}$, ou encore

$$A^i_k = G^{\bar{j}i}\frac{\delta G_{k\bar{j}}}{\delta z^\alpha}dz^\alpha + G^{\bar{j}i}\frac{\partial G_{k\bar{j}}}{\partial \eta^l}\delta\eta^l.$$

L'équation 1.2.15 donne :

$$\gamma^i_{\alpha k} = G^{\bar{j}i}\frac{\delta G_{k\bar{j}}}{\delta z^\alpha}, \quad C^i_{kl} = G^{\bar{j}i}\frac{\partial G_{k\bar{j}}}{\partial \eta^l}. \tag{1.2.18}$$

**Remarque 1.2.1** *Il y a une relation entre les formes linéaires $\gamma^j_{i\alpha}(z,\eta)$ et $\Gamma^j_{i\alpha}(z,\eta)$. En effet :*

$$\nabla^{1,0}_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\tilde{e}_i = \gamma^k_{i\alpha}\tilde{e}_k \iff \nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\tilde{e}_i - N^k_\alpha \nabla^{1,0}_{\frac{\partial}{\partial \eta^j}}\tilde{e}_i = \gamma^k_{i\alpha}\tilde{e}_k$$

*En conséquence :*

$$\gamma^k_{i\alpha} = \Gamma^k_{i\alpha} - N^k_\alpha C^k_{ij} \tag{1.2.19}$$

*Étant donné que $\eta^i C^k_{ij} = 0$, on obtient : $\eta^i\gamma^k_{\alpha i} = \eta^i\Gamma^k_{\alpha i}$.*

L'équation 1.2.19 relie les cœfficients de la connexion Finslérienne complexe calculés par Kobayashi dans la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}\right\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq i\leq r}$ de $T^{1,0}E^0$ à ceux qu'on vient de calculer dans la base de $\left\{\dfrac{\delta}{\delta z^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial \eta^i}\right\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq i\leq r}$ de $T^{1,0}E^0$ obéissant à la décomposition de $T^{1,0}E^0$ en somme directe de sous-fibrés vertical et horizontal, à travers une expression faisant intervenir les cœfficients de la connexion non linéaire $N^\alpha_i$ et les cœefficients $C^i_{jk}$ reliés à la dérivation par rapport aux variables de la fibre.

### 1.2.3 Courbure Finslérienne de Chern

Nous passons désormais au calcul des cœfficients de la courbure Finslérienne de Chern. Une connexion $\nabla : A(\pi^{-1}E) \to A^1(\pi^{-1}E)$ peut être étendue de $A^k(\pi^{-1}E)$ dans $A^{k+1}(\pi^{-1}E)$ en posant

$$\nabla(\alpha\otimes\tilde{s}) = d\alpha\otimes\tilde{s} + (-1)^k\alpha\otimes\nabla\tilde{s} \tag{1.2.20}$$

pour toute $k$-forme sur $E^0$ et toute section $\tilde{s}$ de $\pi^{-1}E$. La courbure de la connexion $\nabla$ est alors définie par $\Omega = \nabla^2 : A(\pi^{-1}E) \to A^2(\pi^{-1}E)$. Localement on a :

$$\Omega^j_i = dA^j_i + A^j_k \wedge A^k_i \tag{1.2.21}$$

Puisque $\nabla$ est de type $(1,0)$ alors $\Omega \in A^{1,1}(E^0, \mathrm{End}(\pi^{-1}E))$. La forme de courbure est donnée par

$$\Omega^j_i = \bar{\partial}A^j_i \tag{1.2.22}$$

Dans la base $\{dz^\alpha, \delta\eta^i, 1 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i \leq r\}$ de $(T^{1,0}E^0)^*$ et dans une base de sections locales $\{\tilde{e}_i(z,\eta)\}_{1\leq i\leq r}$ de $\pi^{-1}E$, $\Omega$ admet 4 cœfficients $\mathfrak{R}$, $H$, $L$ et $Q$. $\mathfrak{R}$ est nommée la $hh$-courbure, $L$ et $H$ sont les cœfficients de la $hv$-courbure et $Q$ est celle de la $vv$-courbure. Si $F$ est Hermitienne alors $P = H = Q = 0$. En d'autres termes, la $hh$-courbure correspond à la courbure Hermitienne de Chern lorsque le tenseur fondamental correspond à une métrique Hermitienne $G_{i\bar{j}}(z,\eta) = G_{i\bar{j}}(z)$. Nous montrons aussi le lien entre ces nouveaux cœfficients et ceux calculés par Koabayshi dans [K3].

**Proposition 1.2.1** *Soit $\{\tilde{e}_i(z,\eta)\}_{1\leq i\leq r}$ une base de sections locales de $\pi^{-1}E$ et soit $\{dz^\alpha, \delta\eta^i\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq i\leq r}$ une base de sections locales de $(T^{1,0}E^0)^*$. La matrice de la courbure Finslérienne est donnée par :*

$$\Omega^i_j = \mathfrak{R}^i_{j\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + H^i_{j\alpha\bar{l}} dz^\alpha \wedge \delta\bar{\eta}^l + L^i_{jk\bar{\beta}} \delta\eta^k \wedge d\bar{z}^\beta + Q^i_{jk\bar{l}} \delta\eta^k \wedge \delta\bar{\eta}^l \tag{1.2.23}$$

*Les cœfficients de la hh-courbure sont :*

$$\mathfrak{R}^i_{j\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\delta\gamma^i_{j\alpha}}{\delta\bar{z}^\beta} - C^i_{jl}\frac{\delta N^l_\alpha}{\delta\bar{z}^\beta} \tag{1.2.24}$$

*On pose $\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = G_{h\bar{j}} R^h_{i\alpha\bar{\beta}}$, on obtient alors :*

$$\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\delta^2 G_{i\bar{j}}}{\delta\bar{z}^\beta \delta z^\alpha} + G^{h\bar{l}} \frac{\delta G_{h\bar{j}}}{\delta\bar{z}^\beta}\frac{\delta G_{i\bar{l}}}{\delta z^\alpha} + \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial\eta^l}\frac{\delta N^l_\alpha}{\delta\bar{z}^\beta} \tag{1.2.25}$$

*Les cœfficients de la vv-courbure sont*

$$Q^i_{jk\bar{l}} = -\frac{\partial C^i_{jk}}{\partial\bar{\eta}^l} \tag{1.2.26}$$

*De même, soit $Q_{i\bar{j}k\bar{l}} = G_{h\bar{j}} Q^h_{ik\bar{l}}$, on a :*

$$Q_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l \partial\eta^k} + G^{h\bar{m}} \frac{\partial G_{h\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k} \tag{1.2.27}$$

*Enfin les cœfficients de la hv-courbure sont les $L^i_{jk\bar{\beta}}$ et $H^i_{j\alpha\bar{l}}$ où*

$$L^i_{jk\bar{\beta}} = -\frac{\delta C^i_{jk}}{\delta\bar{z}^\beta},\ H^i_{j\alpha\bar{l}} = -\frac{\partial\gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{\eta}^l} - C^i_{jk}\frac{\partial N^k_\alpha}{\partial\bar{\eta}^l} \tag{1.2.28}$$

*Posons* $L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} = G_{h\bar{j}}L^h_{ik\bar{\beta}}$. *On a :*

$$L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} = \left(-\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\eta^k\partial\bar{z}^{\bar{\beta}}} + G^{p\bar{m}}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k}\frac{\partial G_{p\bar{j}}}{\partial\eta^{\bar{l}}}\right) - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}}\left(-\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\eta^k\partial\eta^{\bar{l}}} + G^{p\bar{m}}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k}\frac{\partial G_{p\bar{j}}}{\partial\eta^{\bar{l}}}\right) \qquad (1.2.29)$$

*De même si l'on pose* $H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} = G_{h\bar{j}}H^h_{i\alpha\bar{l}}$, *on obtient :*

$$H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} = \left(-\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l\partial z^\alpha} + G^{k\bar{h}}\frac{\partial G_{i\bar{h}}}{\partial z^\alpha}\frac{\partial G_{k\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l}\right) - N^k_\alpha\left(\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l\partial\eta^k} + G^{h\bar{m}}\frac{\partial G_{h\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k}\right) \qquad (1.2.30)$$

**Preuve 1.2.1** *Dans la base* $\left\{dz^\alpha, d\eta^k\right\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq k\leq r}$ *de* $(T^{1,0}E^0)^*$, *la matrice de la courbure Finslérienne de Chern est donnée par*

$$\Omega^i_j = -\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{z}^\beta}\, dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta - \frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{\eta}^l}\, dz^\alpha\wedge d\bar{\eta}^l - \frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{z}^\beta}\, d\eta^k\wedge d\bar{z}^\beta - \frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l}\, d\eta^k\wedge d\bar{\eta}^l \qquad (1.2.31)$$

*En remplaçant*

$$d\eta^k = \delta\eta^k - N^k_\alpha dz^\alpha \qquad (1.2.32)$$
$$d\bar{\eta}^l = \delta\bar{\eta}^l - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} d\bar{z}^\beta \qquad (1.2.33)$$

*Et en réécrivant l'équation 1.2.31 dans la base* $\left\{dz^\alpha, \delta\eta^k\right\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq k\leq r}$ *de* $(T^{1,0}E^0)^*$, *il vient :*

$$\Omega^i_j = \mathfrak{R}^i_{j\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta + L^i_{jk\bar{\beta}}\,\delta\eta^k\wedge d\bar{z}^\beta + H^i_{j\alpha\bar{l}}\, dz^\alpha\wedge\delta\bar{\eta}^l + Q^i_{jk\bar{l}}d\eta^k\wedge\delta\bar{\eta}^l \qquad (1.2.34)$$

*où*

$$\mathfrak{R}^i_{j\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{z}^\beta} + N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}}\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{\eta}^l} + N^k_\alpha\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{z}^\beta} - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}}N^k_\alpha\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l} \qquad (1.2.35)$$
$$H^i_{j\alpha\bar{l}} = -\frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial\bar{\eta}^l} + N^k_\alpha\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l} \qquad (1.2.36)$$
$$L^i_{jk\bar{\beta}} = -\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{z}^\beta} + N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}}\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l} \qquad (1.2.37)$$
$$Q^i_{jk\bar{l}} = -\frac{\partial C^i_{kj}}{\partial\bar{\eta}^l} \qquad (1.2.38)$$

*Pour évaluer chacun de ces termes, rappelons que :*

$$\gamma^i_{j\alpha} = \Gamma^i_{j\alpha} - N^k_\alpha C^i_{jk} \qquad (1.2.39)$$

*et*

$$\frac{\delta}{\delta \bar{z}^\beta} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} - N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^l}$$

*avec :* $N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}} = \overline{N_\beta^l}$ *, ainsi on déduit :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{j\alpha\bar{\beta}}^i &= -\frac{\delta \Gamma_{j\alpha}^i}{\delta \bar{z}^\beta} + N_\alpha^k \frac{\delta C_{kj}^i}{\delta \bar{z}^\beta} \\
&= -\frac{\delta \gamma_{j\alpha}^i}{\delta \bar{z}^\beta} - C_{jk}^i \frac{\delta N_\alpha^k}{\delta \bar{z}^\beta} - N_\alpha^k \frac{\delta C_{jk}^i}{\delta \bar{z}^\beta} + N_\alpha^k \frac{\delta C_{kj}^i}{\delta \bar{z}^\beta} \\
&= -\frac{\delta \gamma_{j\alpha}^i}{\delta \bar{z}^\beta} - C_{jk}^i \frac{\delta N_\alpha^k}{\delta \bar{z}^\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{j\alpha\bar{l}}^i &= -\frac{\partial \Gamma_{j\alpha}^i}{\partial \bar{\eta}^l} + N_\alpha^k \frac{\partial C_{kj}^i}{\partial \bar{\eta}^l} \\
&= -\frac{\partial \gamma_{j\alpha}^i}{\partial \bar{\eta}^l} - C_{jk}^i \frac{\partial N_\alpha^k}{\partial \bar{\eta}^l} - N_\alpha^k \frac{\partial C_{kj}^i}{\partial \bar{\eta}^l} + N_\alpha^k \frac{\partial C_{kj}^i}{\partial \bar{\eta}^l} \\
&= -\frac{\partial \gamma_{j\alpha}^i}{\partial \bar{\eta}^l} - C_{jk}^i \frac{\partial N_\alpha^k}{\partial \bar{\eta}^l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{jk\bar{\beta}}^i &= -\frac{\partial C_{kj}^i}{\partial \bar{z}^\beta} + N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}} \frac{\partial C_{kj}^i}{\partial \bar{\eta}^l} \\
&= -\frac{\delta C_{kj}^i}{\delta \bar{z}^\beta}
\end{aligned}$$

*Commençons par les cœfficients de la hh-courbure. On a :*

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta \gamma_{j\alpha}^i}{\delta \bar{z}^\beta} &= -\frac{\delta}{\delta \bar{z}^\beta} \left( G^{i\bar{l}} \frac{\delta G_{j\bar{l}}}{\delta z^\alpha} \right) \\
&= -\frac{\delta G^{i\bar{l}}}{\delta \bar{z}^\beta} \frac{\delta G_{j\bar{l}}}{\delta z^\alpha} - G^{i\bar{l}} \frac{\delta}{\delta \bar{z}^\beta} \left( \frac{\delta G_{j\bar{l}}}{\delta z^\alpha} \right) \\
&= G^{i\bar{m}} G^{k\bar{l}} \frac{\delta G_{k\bar{m}}}{\delta \bar{z}^\beta} \frac{\delta G_{j\bar{l}}}{\delta z^\alpha} - G^{i\bar{l}} \frac{\delta^2 G_{j\bar{l}}}{\delta \bar{z}^\beta \delta z^\alpha}
\end{aligned}$$

*En posant* $\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = G_{h\bar{j}}\mathfrak{R}^h_{i\alpha\bar{\beta}}$, *et sachant que :*

$$\begin{aligned} G_{h\bar{j}}C^h_{ik} &= G_{h\bar{j}}G^{\bar{m}h}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial \eta^k} \\ &= \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k} \end{aligned}$$

*on obtient :*

$$\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\delta^2 G_{i\bar{j}}}{\delta\bar{z}^\beta \delta z^\alpha} + G^{h\bar{l}}\frac{\delta G_{h\bar{j}}}{\delta\bar{z}^\beta}\frac{\delta G_{i\bar{l}}}{\delta z^\alpha} - \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial\eta^k}\frac{\delta N^k_\alpha}{\delta\bar{z}^\beta} \tag{1.2.40}$$

*Pour les cœfficients de la vv-courbure, on a :*

$$\begin{aligned} Q^h_{ik\bar{l}} &= -\frac{\partial C^h_{ik}}{\partial\bar{\eta}^l} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}^l}\left(G^{h\bar{m}}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k}\right) \\ &= -\left[\frac{\partial G^{h\bar{m}}}{\partial\bar{\eta}^l}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k} + G^{h\bar{m}}\frac{\partial^2 G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k\bar{\eta}^l}\right] \\ &= G^{h\bar{q}}G^{p\bar{m}}\frac{\partial G_{p\bar{q}}}{\partial\bar{\eta}^l}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k} - G^{h\bar{m}}\frac{\partial^2 G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k\bar{\eta}^l} \end{aligned}$$

*On pose* $Q_{i\bar{j}k\bar{l}} = G_{h\bar{j}}Q^h_{ik\bar{l}}$. *Il vient :*

$$Q_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial\eta^k\partial\bar{\eta}^l} + G^{p\bar{m}}\frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial\eta^k}\frac{\partial G_{p\bar{j}}}{\partial\bar{\eta}^l}. \tag{1.2.41}$$

*Pour les cœfficients de la hv-courbure, on a :*

$$\begin{aligned} L^h_{ik\bar{\beta}} &= -\frac{\delta C^h_{ik}}{\delta\bar{z}^\beta} \\ &= -\frac{\partial C^h_{ik}}{\partial\bar{z}^\beta} + N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}}\frac{\partial C^h_{ik}}{\partial\bar{\eta}^l} \end{aligned}$$

*or*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C^h_{ik}}{\partial\bar{z}^\beta} &= P^h_{ik\bar{\beta}} = (1.2.2) \\ -\frac{\partial C^h_{ik}}{\partial\bar{\eta}^l} &= Q^h_{ik\bar{l}} = (1.2.2) \end{aligned}$$

*Par conséquent :*

$$L^h_{ik\bar{\beta}} = P^h_{ik\bar{\beta}} - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} Q^h_{ik\bar{l}} \tag{1.2.42}$$

*On pose* $L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} = G_{h\bar{j}} L^h_{ik\bar{\beta}}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} &= G_{h\bar{j}} P^h_{ik\bar{\beta}} - G_{h\bar{j}} N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} Q^h_{ik\bar{l}} \\
&= P_{i\bar{j}k\bar{\beta}} - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} Q_{i\bar{j}k\bar{l}} \\
&= \left( -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k \partial z^{\bar{\beta}}} + G^{p\bar{m}} \frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial \eta^k} \frac{\partial G_{p\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^l} \right) - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} \left( -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k \partial \bar{\eta}^l} + G^{p\bar{m}} \frac{\partial G_{i\bar{m}}}{\partial \eta^k} \frac{\partial G_{p\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^l} \right).
\end{aligned}$$

*Finalement on a :*

$$\begin{aligned}
H^h_{i\alpha\bar{l}} &= -\frac{\partial \Gamma^i_{j\alpha}}{\partial \bar{\eta}^l} + N^k_\alpha \frac{\partial C^i_{kj}}{\partial \bar{\eta}^l} \\
&= P^h_{i\alpha\bar{l}} - N^k_\alpha Q^h_{ik\bar{l}}
\end{aligned}$$

*De même, en posant* $H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} = G_{h\bar{j}} H^h_{i\alpha\bar{l}}$, *on obtient :*

$$H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} = P_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} - N^k_\alpha Q_{i\bar{j}k\bar{l}} \tag{1.2.43}$$

**Proposition 1.2.2** *Soit* $\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$, $Q_{i\bar{j}k\bar{l}}$, $L_{i\bar{j}k\bar{\beta}}$ *et* $H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}$ *les cœfficients de la courbure Finslérienne de Chern du fibré* $(E, F)$. *En utilisant les propriétés de dérivations du tenseur fondamental* $G_{i\bar{j}}$ *on obtient :*

$$\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j = -\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + G^{k\bar{l}} \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial \eta^k} \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial \bar{\eta}^l} \tag{1.2.44}$$

$$Q_{i\bar{j}k\bar{l}} \eta^i = Q_{i\bar{j}k\bar{l}} \eta^k = 0 \tag{1.2.45}$$

$$L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} \eta^i = L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} \eta^k = 0 \tag{1.2.46}$$

$$H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} \eta^i \bar{\eta}^j = H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} \eta^i \bar{\eta}^l = 0 \tag{1.2.47}$$

**Preuve 1.2.2**

*Rappelons que la hh-courbure est donnée par :*

$$\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\delta^2 G_{i\bar{j}}}{\delta \bar{z}^\beta \delta z^\alpha} + G^{h\bar{l}} \frac{\delta G_{h\bar{j}}}{\delta \bar{z}^\beta} \frac{\delta G_{i\bar{l}}}{\delta z^\alpha} - \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k} \frac{\delta N^k_\alpha}{\delta \bar{z}^\beta}. \tag{1.2.48}$$

*Commençons par le calcul de la première partie de l'équation 1.2.48, on a :*

$$\frac{\delta^2 G_{i\bar{j}}}{\delta \bar{z}^\beta \delta z^\alpha}\eta^i\bar{\eta}^j = \frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\eta^i\bar{\eta}^j - \frac{\partial N_\alpha^k}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}\eta^i\bar{\eta}^j - N_\alpha^k \frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\beta \partial \eta^k}\eta^i\bar{\eta}^j$$
$$-N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}}\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^l \partial z^\alpha}\eta^i\bar{\eta}^j + N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}}\frac{\partial N_\alpha^k}{\partial \bar{\eta}^l}\frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}\eta^i\bar{\eta}^j + N_\alpha^k N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}}\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k \partial \bar{\eta}^l}\eta^i\bar{\eta}^j$$

*Moyennant l'équation 1.1.13 et l'équation 1.1.14 on en déduit :*

$$G_{i\bar{j}k}\eta^i\bar{\eta}^j = 0, \quad G_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^i\bar{\eta}^j = 0$$
$$G_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^i\bar{\eta}^j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\left(G_{i\bar{j}k}\eta^i\bar{\eta}^j\right) = 0$$
$$G_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\eta^i\bar{\eta}^j = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left(G_{i\bar{j}\bar{l}}\eta^i\bar{\eta}^j\right) = 0$$

*Par conséquent :*

$$\frac{\delta^2 G_{i\bar{j}}}{\delta \bar{z}^\beta \delta z^\alpha}\eta^i\bar{\eta}^j = \frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\eta^i\bar{\eta}^j = \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}.$$

*D'autre part on vérifie*

$$\frac{\delta G_{h\bar{j}}}{\delta \bar{z}^\beta}\bar{\eta}^j = \frac{\partial G_{h\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\beta}\bar{\eta}^j - N_{\bar{\beta}}^{\bar{l}}\frac{\partial G_{h\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^l}\bar{\eta}^j$$
$$= \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial \eta^h}.$$

*De même on a :*

$$\frac{\delta G_{i\bar{l}}}{\delta z^\alpha}\eta^i = \frac{\partial G_{i\bar{l}}}{\partial z^\alpha}\eta^i - N_\alpha^k \frac{\partial G_{i\bar{l}}}{\partial \eta^k}\eta^i$$
$$= \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial \bar{\eta}^l}.$$

En conséquence :

$$\mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}\eta^i\bar{\eta}^j = -\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + G^{h\bar{l}}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^\beta \partial \eta^h}\frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial \bar{\eta}^l}. \tag{1.2.49}$$

Nous remarquons ainsi qu'en contractant les cœfficients de la $hh$-courbure par $\eta^i\bar{\eta}^j$, on obtient les mêmes cœfficients calculés par Kobayashi dans la base $\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \eta^i}\right\}_{1\leq\alpha\leq n,\, 1\leq i\leq r}$

du fibré $T^{1,0}E^0$.
Concernant les coefficients de la $vv$-courbure on vérifie aussi qu'ils sont les mêmes que ceux calculées par Kobayashi. Ainsi $Q_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^i = 0$.
Concernant les coefficients de la $hv$-courbure, on a :

$$L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} = P_{i\bar{j}k\bar{\beta}} - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} Q_{i\bar{j}k\bar{l}}, \tag{1.2.50}$$

d'où :

$$L_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^i = P_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^i - N^{\bar{l}}_{\bar{\beta}} Q_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^i. \tag{1.2.51}$$

Moyennant les équations 1.1.23 et 1.1.24, on obtient : $L_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\eta^i = 0$.
Enfin, concernant le deuxième coefficients de la $hv$-courbure on a :

$$H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\eta^i = P^h_{i\alpha\bar{l}} - N^k_\alpha Q^h_{ik\bar{l}} \tag{1.2.52}$$

D'après 1.1.22 on a : $P_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\eta^i = 0$, et d'après 1.1.24 on a : $Q_{i\bar{j}k\bar{l}}\eta^i = 0$, il vient : $H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}}\eta^i = 0$.

## 1.3 Négativité d'un fibré vectoriel

Dans les sections précédentes, nous avons présenté deux différentes approches de calcul des structures Finslériennes. La première est celle donnée par Kobayashi et où les calculs sont effectués dans la base $\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \eta^i}, 1 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i \leq r\right\}$ du fibré $T^{1,0}E^0$. La deuxième approche est celle introduite dans les travaux de M. Abate, G. Patrizio, et T. Aikou, et où les calculs sont effectués dans la base $\left\{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \eta^i}, 1 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i \leq r\right\}$ de $T^{1,0}E^0$ obéissant à la décomposition de $T^{1,0}E^0$ en somme directe de sous-fibrés vertical et horizontal. En outre, ces deux approches qui s'appuient essentiellement sur le tenseur fondamental $G_{i\bar{j}}$, sont équivalentes et peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre à travers certains calculs comme nous venons de le montrer dans la Proposition 1.2.2. Nous espérons maintenant retrouver la définition de négativité d'un fibré vectoriel holomorphe $(E, F)$ donnée par Kobayashi sur le nouveau fibré $\pi^{-1}E \longrightarrow E^0$.

Soit $Z = Z^\alpha(z,\eta)\frac{\delta}{\delta z^\alpha} + Y^m(z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta^m}$ un champ de vecteur de $T^{1,0}E^0$ et $\tilde{s} = \tilde{s}^k \tilde{e}_k(z,\eta)$ une section de fibré $\pi^{-1}E$. On associe à la matrice de courbure :

$$\Omega^i_j = \mathfrak{R}^i_{j\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta + H^i_{j\alpha\bar{l}} dz^\alpha \wedge \delta\bar{\eta}^l + L^i_{jk\bar{\beta}} \delta\eta^k \wedge d\bar{z}^\beta + Q^i_{jk\bar{l}} \delta\eta^k \wedge \delta\bar{\eta}^l$$

la forme Hermitienne $\psi$ définie sur tout vecteur décomposable $U = Z \otimes \tilde{s} \in T^{1,0}E \otimes \pi^{-1}E$, par :

$$\psi(Z \otimes \tilde{s}, Z \otimes \tilde{s}) = \mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} Z^\alpha \bar{Z}^\beta \tilde{s}^i \tilde{s}^{\bar{j}} + H_{i\bar{j}\alpha\bar{l}} Z^\alpha Y^{\bar{l}} \tilde{s}^i \tilde{s}^{\bar{j}} + +L_{i\bar{j}k\bar{\beta}} Y^k \bar{Z}^\beta \tilde{s}^i \tilde{s}^{\bar{j}} + Q_{i\bar{j}k\bar{l}} Y^k Y^{\bar{l}} \tilde{s}^i \tilde{s}^{\bar{j}}$$

Si $\tilde{s} = \sigma = \eta^i \tilde{e}_i(z, \eta)$ (la section de Liouville du fibré $\pi^{-1}E$), compte tenu de la Proposition 1.2.2, on a :

$$\psi(Z \otimes \sigma, Z \otimes \sigma) = \mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j Z^\alpha Z^{\bar{\beta}}.$$

La restriction de cette forme sur la section de Liouville du fibré $\pi^{-1}E$ ne fait apparaître que les cœfficients de la $hh$-courbure et les composantes horizontales du champ de vecteurs $Z$.

**Proposition 1.3.1** *Soit $E$ un fibré vectoriel holomorphe de rang $r \geq 2$ au dessus d'une variété complexe $X$, muni d'une métrique Finslérienne $F$ strictement pseudoconvexe. Soit $Z \in T^{1,0}E^0$ et $\sigma$ la section du Liouville du fibré $\pi^{-1}E$. $E$ est négatif si et seulement si $\psi(Z \otimes \sigma, Z \otimes \sigma)$ est définie négative.*

**Preuve 1.3.1** *En [K2] et [K3] Kobayashi prouve qu'un fibré vectoriel holomorphe $E$ est négatif si et seulement s'il admet une métrique Finslérienne pseudoconvexe à courbure négative. Par ailleurs $F$ est à courbure négative si et seulement si la métrique Hermitienne induite sur $L(E)$ est à courbure négative. En outre, et suivant l'approche que nous venons de proposer dans la deuxième section, $F$ induit une métrique Hermitienne $\tilde{g}$ sur $\pi^{-1}E$ . On vérifie que $\tilde{g}(\sigma, \sigma) = G_{i\bar{j}}(z, \eta)\eta^i \bar{\eta}^j = F^2(z, \eta) = ||\sigma||^2_{\tilde{g}}$. De ce fait $||\sigma||^2_{\tilde{g}} = F^2$ est une métrique Hermitienne sur $L(E)$. Par suite la matrice de courbure $\bar{\partial}\partial \log F^2$ de $(L(E), F^2)$ est donnée par (voir [B-K])*

$$\bar{\partial}\partial \log F^2 = \frac{1}{F^2} \mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta - \frac{\partial^2 \log F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} \delta\eta^i \wedge \delta\bar{\eta}^j.$$

*La pseudo-convexité de $F$ suppose la définie positivité de la matrice $\dfrac{\partial^2 \log F^2}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$. Par conséquent $\bar{\partial}\partial \log F^2$ est définie négative si et seulement si la forme de courbure $\psi(Z \otimes \sigma, Z \otimes \sigma) = \mathfrak{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \eta^i \bar{\eta}^j$ est définie négative.*

# Chapitre 2

# Structures Finslériennes complexes sur le produit tensoriel

Ce chapitre traite la négativité du produit tensoriel de deux fibrés vectoriels holomorphes en termes de structures Finslériennes complexes. Il s'agit d'une extension de la question posée par Kobayashi dans l'un de ses articles concernant ce sujet [K3]. Peut-on retrouver le théorème de Hartshorne sur la négativité du fibré $E_1 \otimes E_2$ dans le cas où $E_1$ et $E_2$ sont munis de deux métriques Finslériennes à courbures négatives ? Une réponse partielle a été donnée par Ben Abdesselem en [B] sous l'hypothèse que $E_1$ est à courbure négative et $E_2^*$ est engendré par ses sections globales.

Par le choix d'une structure Finslérienne utilisant les deux structures initiales $F_1$ et $F_2$ sur $E_1$ et $E_2$, et par un calcul direct, le présent travail donne des conditions optimales en termes de traces de ces métriques sur les sections globales de $E_1^*$ et $E_2^*$ qui puissent nous permettre d'affirmer la négativité du produit tensoriel, c'est à dire la négativité de la courbure de la structure Finslérienne proposée. D'autre part, une hypothèse sur les sections globales de $E_1^*$ et $E_2^*$ nous permet d'assurer que cette structure est strictement pseudoconvexe sur le fibré $E_1 \otimes E_2$.

## 2.1 Position du problème

Soient $E_1$ et $E_2$ deux fibrés vectoriels holomorphes de rang $r$ et $s$ respectivement au dessus d'une variété complexe compacte de dimension $n$. Soit $Z = \left(z^1, ..., z^n\right)$ un système de coordonnées locales sur $X$, $\zeta = \left(\zeta^1, ..., \zeta^r\right)$ un système de coordonnées locales sur la fibre $E_1|_z$, défini par une base de sections locales holomorphes $t = (t_1(z), ..., t_r(z))$ tel que $\zeta = \zeta^i t_i$ . Et soit $\eta = (\eta^1, ..., \eta^s)$ un système de coordonnées locales sur la fibre $E_2|_z$

défini par une base de sections locales holomorphes $e = (e_1, ..., e_s)$, tel que $\eta = \eta^j e_j$. Par suite, $(z, \zeta) = \left(z^1, ..., z^n, \zeta^1, ..., \zeta^r\right)$ et $(z, \eta) = \left(z^1, ..., z^n, \eta^1, ..., \eta^s\right)$ sont des systèmes de coordonnées locales holomorphes sur les fibrés $E_1$ et $E_2$ respectivement.

Considérons maintenant $N_1$ sections globales $\left(\varphi^1, ..., \varphi^{N_1}\right)$ sur $E_2^*$, et $N_2$ sections globales $\left(\psi^1, ..., \psi^{N_2}\right)$ sur $E_1^*$, vérifiant l'hypothèse $(H)$ suivante :
$(H)$ : En tout point $z \in X$ on a : $\left(\varphi^1(z), ..., \varphi^{N_1}(z)\right)$ engendrent $(E_2^*)|_z$ ou $\left(\psi^1(z), ..., \psi^{N_2}(z)\right)$ engendrent $(E_1^*)|_z$.
L'hypothèse $(H)$ est plus faible que le fait que sur $E_1^*$ et sur $E_2^*$ soient engendrés par leurs sections globales. En fait, les sections globales de l'un l'engendrent dès que ceux de l'autre lui font défaut.

Un point $b \in E_1 \otimes E_2$, est une application bilinéaire définie sur $E_1^* \times E_2^*$ à valeurs complexes. On lui associe $N_1$ formes linéaires $\{b_1, ..., b_{N_1}\}$ de $E_1^*$, considérées comme des points de $E_1$, et qui sont définies par :

$$\forall \zeta \in E_1^*, b_a(\zeta) = b(\zeta, \varphi^a)$$

De même, on définit $N_2$ formes linéaires $\left\{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_{N_2}\right\}$ de $E_2^*$, considérées comme des points de $E_2$ par

$$\forall \eta \in E_2^*, \qquad \tilde{b}_c(\eta) = b(\psi^c, \eta)$$

Si localement $b = b^{ij} t_i \otimes e_j$, $\varphi = \varphi_j^a e^j$, $\psi^c = \psi_i^c t^i$ alors $b_a^i = b^{ij} \varphi_j^a$ et $\tilde{b}_c^i = b^{ij} \psi_i^c$.

Notons $Q_1 = N_1 + \dfrac{N_1(N_1-1)}{2}$ et $Q_2 = N_2 + \dfrac{N_2(N_2-1)}{2}$. On ajoute aux $N_1$ formes linéaires $\{b_1, ..., b_{N_1}\}$ les $\dfrac{N_1(N_1-1)}{2}$ points de $E_1$ donnés par : $b_{N_1+1} = b_1 + b_2$, $b_{2N_1-1} = b_1 + b_{N_1},\ b_{2N_1} = b_2 + b_3,\ b_{3N_1-3} = b_2 + b_{N_1}, ..., b_{Q_1} = b_{N_1-1} + b_{N_1}$.
Par ailleurs $\{b_{N_1+1}, ..., b_{Q_1}\}$ sont définies par : $b\left(., \varphi^a + \varphi^e\right) = b_a + b_e, 1 \leq a < e \leq N_1$ de sorte que $\varphi^{N_1+1} = \varphi^1 + \varphi^2, ..., \varphi^{Q_1} = \varphi^{N_1-1} + \varphi^{N_1}$.
De même on ajoute aux $N_2$ formes linéaires $\left\{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_{N_2}\right\}$ les $\dfrac{N_2(N_2-1)}{2}$ points de $E_2$ donnés par : $\tilde{b}_{N_2+1} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2,\ \tilde{b}_{2N_2-1} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_{N_2},\ \tilde{b}_{2N_1} = \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3, \tilde{b}_{3N_2-3} = \tilde{b}_2 + b_{N_2}, ...,$
$\tilde{b}_{Q_2} = \tilde{b}_{N_2-1} + \tilde{b}_{N_2}$.
Ainsi $\left\{\tilde{b}_{N_2+1}, ..., \tilde{b}_{Q_2}\right\}$ sont définies par : $b\left(\psi^c + \psi^f, .\right) = \tilde{b}_c + \tilde{b}_f, 1 \leq c < f \leq N_2$ de sorte que $\psi^{N_2+1} = \psi^1 + \psi^2, ..., \psi^{Q_2} = \psi^{N_2-1} + \psi^{N_2}$.

## 2.2 Structure Finslérienne sur le produit tensoriel

**Théorème 2.2.1** *Soient $(E_1, F_1)$ et $(E_2, F_2)$ deux fibrés vectoriels holomorphes au dessus d'une variété complexe $X$, munis des structures Finslériennes $F_1$ et $F_2$, et soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $F_1^p$ et $F_2^q$ soient $C^2$ au dessus de la section nulle (on choisira les plus petits). On suppose l'existence de sections globales $\left(\varphi^1, ..., \varphi^{N_1}\right)$ (respectivement $\left(\psi^1, ..., \psi^{N_2}\right)$) sur $E_2^*$ (respectivement $E_1^*$) vérifiant l'hypothèse $(H)$.*

*Alors l'application $F : E_1 \otimes E_2 \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\forall b \in E_1 \otimes E_2, \quad F(b) = \sqrt{\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}}$$

*est une structure Finslérienne de classe $C^2$ strictement pseudoconvexe sur le fibré $E_1 \otimes E_2$. On rappelle que $b_a = b(., \varphi^a)$ et $\tilde{b}_c = b(\psi^c, .)$ .*

La preuve du Théorème 2.2.1 nécessite le lemme donné en [B], que nous rappelons ci-dessous :

**Lemme 2.2.1** *On a*

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right) \sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-4}(b_a) \frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a) \frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) \varphi_j^a X^{ij} \bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl} \\
- & \left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a) \frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a) \bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right) \left(\sum_{e=1}^{e=Q_1} F_1^{p-2}(b_e) \frac{\partial F_1^2}{\partial b_e^i}(b_e) \varphi_j^e X^{ij}\right) \\
= & \sum_{a,e=1}^{Q_1} F_1^{p-4}(b_a) F_1^{p-4}(b_e) \left| F_1^2(b_a) \frac{\partial F_1^2}{\partial b_e^i}(b_e) \varphi_j^e X^{ij} - F_1^2(b_e) \frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) \varphi_j^a X^{ij} \right|^2
\end{aligned}$$

*De même on a*

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right) \sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c) \frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c) \frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) \psi_j^c X^{ij} \bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl} \\
- & \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c) \frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_a^k}(\tilde{b}_c) \bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right) \left(\sum_{f=1}^{f=Q_2} F_2^{p-2}(\tilde{b}_f) \frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_f^i}(\tilde{b}_f) \psi_j^c X^{ij}\right) \\
= & \sum_{c,f=1}^{Q_2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c) F_2^{q-4}(\tilde{b}_f) \left| F_2^2(\tilde{b}_c) \frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_f^i}(\tilde{b}_f) \psi_j^f X^{ij} - F_2^2(\tilde{b}_f) \frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) \psi_j^c X^{ij} \right|^2
\end{aligned}$$

### 2.2.1 Preuve du Théorème 2.2.1.

- **Homogénéité** : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
F(\lambda b) &= \sqrt{\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(\lambda b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\lambda \tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}} \\
&= \sqrt{|\lambda|^2 \left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + |\lambda|^2 \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}} \\
&= |\lambda| \sqrt{\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}} \\
&= |\lambda| F(b)
\end{aligned}$$

- Il est clair que $F$ est positive et que $F(0) = 0$. Montrons que si $F(b) = 0$ alors nécessairement $b = 0$.

Soit $b \in E_1 \otimes E_2$ tel que $F(b) = 0$. Par définition de $F$, sachant que $F_1$ et $F_2$ sont deux structures Finslériennes, on a $b_a = 0$ pour tout $a \in \{1, ...Q_1\}$ et $\tilde{b}_c = 0$ pour tout $c \in \{1, ...Q_2\}$.

Supposons qu'il existe $(\zeta, \eta) \in E_1^* \times E_2^*$ tel que $b(\zeta, \eta) \neq 0$. D'après l'hypothèse (H), on peut décomposer ou bien $\zeta$ sur les $\psi^c$, ou bien $\eta$ sur les $\varphi^a$. Par conséquent :
ou bien

$$b(\zeta, \eta) = b(\zeta, \eta_a \varphi^a) = \eta_a b_a(\zeta) \neq 0$$

ou bien

$$b(\zeta, \eta) = b(\zeta_c \psi^c, \eta) = \zeta_c \tilde{b}_c(\eta) \neq 0$$

ce qui absurde car les $b_a$ et les $\tilde{b}_c$ sont tous nuls.

- **Stricte convexité** : Montrons que la matrice hessienne

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij} \partial \bar{b}^{kl}}(z, b) X^{ij} \bar{X}^{kl}$$

est définie positive. Commençons en premier lieu par le calcul de $\dfrac{\partial F^2}{\partial b^{ij}}(z,b)X^{ij}$. On a

$$\frac{\partial F^2}{\partial b^{ij}}(z,b)X^{ij} = \frac{\partial}{\partial b^{ij}}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} X^{ij} + \frac{\partial}{\partial b^{ij}}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}} X^{ij} \tag{2.2.1}$$

La dérivée de la première partie de l'équation 3.3.2 donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b^{ij}}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} X^{ij} &= \frac{2}{p}\left(F_1^p(b_1)+....+F_1^p(b_{Q_1})\right)^{\frac{2}{p}-1}\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{\partial F_1^p}{\partial b^{ij}}(b_a)X^{ij} \\
&= \frac{2}{p}\left(F_1^p(b_1)+....+F_1^p(b_{Q_1})\right)^{\frac{2}{p}-1}\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{\partial F_1^p}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij} \\
&= \frac{2}{p}\left(F_1^p(b_1)+....+F_1^p(b_{Q_1})\right)^{\frac{2}{p}-1}\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{\partial (F_1^2)^{\frac{p}{2}}}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij} \\
&= \left(F_1^p(b_1)+....+F_1^p(b_{Q_1})\right)^{\frac{2}{p}-1}\sum_{a=1,b_a\neq 0}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}
\end{aligned}$$

Un calcul identique nous permet d'obtenir la dérivée de la deuxième partie de l'équation 3.3.2, soit :

$$\frac{\partial}{\partial b^{ij}}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}} X^{ij} = \left(F_2^q(\tilde{b}_1)+....+F_2^{Q_2}(\tilde{b}_q)\right)^{\frac{2}{q}-1}\sum_{c=1,\tilde{b}_c\neq 0}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}.$$

On pose

$$T_1 = \left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b_c})\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl} &= \frac{\partial}{\partial \bar{b}^{kl}}\left[T_1^{2-p}\sum_{a=1,}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]\bar{X}^{kl} \\
&+ \frac{\partial}{\partial \bar{b}^{kl}}\left[T_2^{2-q}\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right]\bar{X}^{kl} \\
&= (2)+(3)
\end{aligned}$$

Pour (2) on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{b}^{kl}}\left[T_1^{2-p}\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]\bar{X}^{kl}$$

$$=\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right)\frac{\partial T_1^{2-p}}{\partial \bar{b}^{kl}}\bar{X}^{kl}$$

$$+T_1^{2-p}\frac{\partial}{\partial \bar{b}^{kl}}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]\bar{X}^{kl}$$

$$=\frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right)\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right)$$

$$+T_1^{2-p}\times\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right.$$
$$\left.+\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right]$$

$$=\frac{p-2}{2}T_1^{2-p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right)$$

$$-\frac{p-2}{2}T_1^{2-2p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right)\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right)$$

$$+T_1^{2-p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right)$$

$$=\frac{p-2}{2}T_1^{2-2p}\times\left[\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p}(b_a)\right)\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right)\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^e X^{ij}\right)\right]$$

$$+T_1^{2-p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right).$$

Et d'après le Lemme 2.2.1 :

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &= \frac{p-2}{2}T_1^{2-2p}\left\{\sum_{a,e=1}^{Q_1} F_1^{p-4}(b_a)F_1^{p-4}(b_e)\left|F_1^2(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_e^i}(b_e)\varphi_j^e X^{ij} - F_1^2(b_e)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right|^2\right\} \\
&+ T_1^{2-p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right)
\end{aligned}
$$

De la même manière :

$$
\begin{aligned}
(3) \quad &= \frac{q-2}{2}T_2^{2-2q}\left\{\sum_{c,f=1}^{Q_2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)F_2^{q-4}(\tilde{b}_f)\left|F_2^2(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_f^i}(\tilde{b}_f)\psi_j^f X^{ij} - F_2^2(\tilde{b}_f)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right|^2\right\} \\
&+ T_2^{2-q}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^q}{\partial \tilde{b}_c^i \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right)
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl} &= \frac{(p-2)}{2}T_1^{2-2p} \times \\
&\left\{\sum_{a,e=1}^{Q_1} F_1^{p-4}(b_a)F_1^{p-4}(b_e)\left|F_1^2(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_e^i}(b_e)\varphi_j^e X^{ij} - F_1^2(b_e)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right|^2\right\} \\
&+ T_1^{2-p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right) \\
&+ \frac{(q-2)}{2}T_2^{2-2q} \times \\
&\left\{\sum_{c,f=1}^{Q_2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)F_2^{q-4}(\tilde{b}_f)\left|F_2^2(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_f^i}(\tilde{b}_f)\psi_j^f X^{ij} - F_2^2(\tilde{b}_f)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right|^2\right\} \\
&+ T_2^{2-q}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^q}{\partial \tilde{b}_c^i \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right)
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse $H$, on sait que si $b \neq 0$ alors, il existe $a \in \{1, ..., N_1\}$ tel que $b_a \neq 0$, ou il existe $c \in \{1, ..., N_2\}$ tel que $\tilde{b}_c \neq 0$.
Dans le cas où il existe $a \in \{1, ..., N_1\}$ tel que $b_a \neq 0$, deux possibilités se présentent : Si

$X^a \neq 0$, la matrice $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl}$ est définie positive.
Sinon, sachant que $X \neq 0$, il existe $e \in \{1, ..., N_1\}$ tel que $X_e \neq 0$. Si $b_e \neq 0$ alors $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl} > 0$. Sinon on ajoute les éléments $b_d = b_a + b_e$ et $X_d = X_a + X_e$, pour $d \in \{N_1+1, ..., Q_1\}$.
Même chose pour les $\tilde{b}_c$. S'il existe $c \in \{1, ..., N_2\}$ tel que $\tilde{b}_c \neq 0$ et $\tilde{X}_c \neq 0$, on a $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl} > 0$. Sinon il existe $f \in \{1, ..., N_2\}$ tel que $\tilde{X}_f \neq 0$. Si $\tilde{b}_f \neq 0$ alors $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl} > 0$. Sinon, on considère les éléments $\tilde{b}_m = \tilde{b}_c + \tilde{b}_f$ et $\tilde{X}_m = \tilde{X}_c + \tilde{X}_f$, pour $m \in \{N_2+1, ..., Q_2\}$.

## 2.3 Négativité du produit tensoriel

En vertu du Théorème 2.2.1, l'application

$$F : E_1 \otimes E_2 \to \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall b \in E_1 \otimes E_2, \quad F(b) = \sqrt{\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}}$$

est une métrique Finslérienne strictement pseudoconvexe. Nous allons maintenant mettre en évidence les conditions sous lesquelles la courbure de $F$ est définie négative. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, $F$ est à courbure négative si et seulement si :

$$-\frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}(z,b) + \left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b^{ij}}(z,b)\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}(z,b) \qquad (2.3.1)$$

est définie négative (où $\left[\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}$ est la matrice inverse de $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)$).
Posons :

$$R_1(z,b_a) = -\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \bar{b}_a^k}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k}$$

et

$$R_2(z,\tilde{b}_c) = -\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \bar{\tilde{b}}_c^k}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i}\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}.$$

On obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.3.1** *Soient* $(E_1, F_1)$ *et* $(E_2, F_2)$ *deux fibrés vectoriels holomorphes munis respectivement de deux métriques Finslériennes* $F_1$ *et* $F_2$*. Sous les hypothèses du théorème* 1*,* $F$ *est à courbure négative dès que*

$$\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}-1} \sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)R_1(z,b_a) + \left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}-1} \sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)R_2(z,\tilde{b}_c)$$

*est définie négative.*

### 2.3.1 Preuve du Théorème 2.3.1

Calculons chacun des termes intervenant dans l'équation 3.3.3. Commençons par la matrice $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial\bar{z}^\beta \partial z^\alpha}(z,b)$. On a :

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial\bar{z}^\beta \partial z^\alpha}(z,b) = \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}} \tag{2.3.2}$$

Conformément à ce qui précède et en se référant à [B] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}} &= T_1^{2-p}\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\left[\frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{z}^\beta}(b_a) + \frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial\bar{\varphi}_l^a}{\partial\bar{z}^\beta}\right] \\
&\times \left[\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a) + \frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)b^{ij}\frac{\partial\varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right] \\
&+ T_1^{2-p}\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}(b_a) + \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial\bar{\varphi}_l^a}{\partial\bar{z}^\beta}\right. \\
&+ \left.\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial\bar{z}^\beta\partial b_i^a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial\varphi_j^a}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i\partial\bar{b}_a^k}(b_a)b^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial\varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\frac{\partial\bar{\varphi}_l^a}{\partial\bar{z}^\beta}\right] \\
&+ \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\left[\frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{z}^\beta}(b_a) + \frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial\bar{\varphi}_l^a}{\partial\bar{z}^\beta}\right]\right) \\
&\times \left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\left[\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a) + \frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)b^{ij}\frac{\partial\varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right]\right)
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

De même pour $F_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}} &= T_2^{2-q}\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\left[\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)+\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_a^k}(\tilde{b}_c)\bar{\tilde{b}}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&\times \left[\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_c)+\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right] \\
&+ T_2^{2-q}\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\left[\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)+\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right. \\
&+ \left.\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_C)b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}+\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_i^c \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_C)b^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&+ \frac{2-q}{2}T_2^{2-2q}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\left[\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_C)+\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\right) \\
&\times \left(\sum_{a=1}^{a=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c\left[\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_c)+\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right]\right) \qquad (2.3.4)
\end{aligned}$$

Pour la matrice $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}(z,b)\bar{X}^{kl}$ on a :

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}(z,b)\bar{X}^{kl} = \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}}\bar{X}^{kl}+\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}\bar{X}^{kl}$$

Toujours en se référant à [B], on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}}(z,b_a)\bar{X}^{kl} &= \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right] \\
&\times \left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)+F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right] \\
&+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)\right. \\
&+ \left.F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} \frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right. \\
&+ \quad \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right].
\end{aligned}
$$

De la même manière on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^p(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{p}}(z,\tilde{b}_C)\bar{X}^{kl} \quad &= \quad \frac{2-q}{2} T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_C)\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right] \\
&\times \quad \left[\sum_{a=1}^{a=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_C) + F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_C) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right] \\
&+ \quad T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_C)\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_c)\right. \\
&+ \quad \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right] \\
&+ \quad T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{b}_a^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right. \\
&+ \quad \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\bar{\psi}_l^c \bar{X}^{kl}\right]
\end{aligned}
$$

Posons :

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha k l}^1 \bar{X}^{kl} \quad &= \quad \frac{2-p}{2} T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right] \\
&+ \quad T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right. \\
&+ \quad \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_i^a \partial \bar{b}_a^k}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\bar{\varphi}_l^a \bar{X}^{kl}\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} w^2_{\alpha kl}\bar{X}^{kl} &= \frac{2-q}{2}T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial\bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c\bar{X}^{kl}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial\tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial\psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right] \\ &+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial\tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial\psi_j^c}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_2^2}{\partial\bar{b}_a^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c\bar{X}^{kl}\right. \\ &+ \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial\tilde{b}_i^c\partial\bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial\psi_j^c}{\partial z^\alpha}\bar{\psi}_l^c\ \bar{X}^{kl}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^1_{\alpha kl}\bar{X}^{kl} &= \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)\right] \\ &+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\frac{\partial F^2}{\partial z^\alpha}(b_a) + F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{b}_a^k}(b_a)\bar{\varphi}_l^a\bar{X}^{kl}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2_{\alpha kl}\bar{X}^{kl} &= \frac{2-q}{2}T_q^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial\bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c\bar{X}^{kl}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_c)\right] \\ &+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial\bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c\bar{X}^{kl}\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(b_c) + F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}_l^c\bar{X}^{kl}\right] \end{aligned}$$

Ceci permet d'obtenir la décomposition suivante :

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{b}^{kl}}(z,b)\bar{X}^{kl} = \left(w^1_{\alpha kl}+\delta^1_{\alpha kl}\right)\bar{X}^{kl} + \left(w^2_{\alpha kl}+\delta^2_{\alpha kl}\right)\bar{X}^{kl} \tag{2.3.5}$$

Par un raisonnement similaire on calcule la dernière matrice $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial\bar{z}^\beta\partial b^{ij}}(z,b)X^{ij}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^2}{\partial\bar{z}^\beta\partial b^{ij}}(z,b)X^{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\beta\partial b^{ij}}\left(\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^p(b_a)\right)^{\frac{2}{p}}X^{ij} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\beta\partial b^{ij}}\left(\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^q(\tilde{b}_c)\right)^{\frac{2}{q}}X^{ij} \\ &= \left(w^1_{\beta ij}+\delta^1_{\beta ij}\right)X^{ij} + \left(w^2_{\beta ij}+\delta^2_{\beta ij}\right)X^{ij} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
w^1_{\beta ij}X^{ij} &= \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\\
&+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\right.\\
&+ \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^2_{\beta ij}X^{ij} &= \frac{2-2q}{2}T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{\tilde{b}}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\\
&+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right.\\
&+ \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^1_{\beta ij}X^{ij} &= \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a)\right]\\
&+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a)+F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2_{\beta ij}X^{ij} &= \frac{2-q}{2}T_1^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)\right]\\
&+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)+F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\psi_j^c X^{ij}\right]
\end{aligned}$$

En vertu de ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^{\beta}\partial b^{ij}}(z,b)\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^{\alpha}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b) \\
&= \left[\left(w^1_{\alpha kl}+w^2_{\alpha kl}\right)+\left(\delta^1_{\alpha kl}+\delta^2_{\alpha kl}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\left[\left(w^1_{\beta ij}+w^2_{\beta ij}\right)+\left(\delta^1_{\beta ij}+\delta^2_{\beta ij}\right)\right] \\
&= \left(w^1_{\alpha kl}+w^2_{\alpha kl}\right)\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\left(w^1_{\beta ij}+w^2_{\beta ij}\right)+\left(w^1_{\alpha kl}+w^2_{\alpha kl}\right)\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\left(\delta^1_{\beta ij}+\delta^2_{\beta ij}\right) \\
&+ \left(\delta^1_{\alpha kl}+\delta^2_{\alpha kl}\right)\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\left(w^1_{\beta ij}+w^2_{\beta ij}\right)+\left(\delta^1_{\alpha kl}+\delta^2_{\alpha kl}\right)\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\left(\delta^1_{\beta ij}+\delta^2_{\beta ij}\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant $\varphi^a_j X^{ij}$ (respectivement $\psi^c_j X^{ij}$) dans $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl}$ par $b^{ij}\dfrac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^{\alpha}}$ (respectivement $\psi^c_j X^{ij}$ par $b^{ij}\dfrac{\partial \psi^c_j}{\partial z^{\alpha}}$), on remarque que :

$$\begin{aligned}
\left(w^1_{\alpha kl}+w^2_{\alpha kl}\right)\bar{X}^{kl} &= \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{\varphi}^a_l\bar{X}^{kl}\right]\times\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^{\alpha}}\right] \\
&+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^{\alpha}}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{\varphi}^a_l\bar{X}^{kl}\right. \\
&+ \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b^i_a\partial \bar{b}^k_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^{\alpha}}\bar{\varphi}^a_l\bar{X}^{kl}\right] \\
&+ \frac{2-q}{2}T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}^c_l\bar{X}^{kl}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}^i_c}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi^c_j}{\partial z^{\alpha}}\right] \\
&+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}^i_c}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi^c_j}{\partial z^{\alpha}}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{b}^k_a}(\tilde{b}_c)\bar{\psi}^c_l\bar{X}^{kl}\right. \\
&+ \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}^c_i\partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi^c_j}{\partial z^{\alpha}}\bar{\psi}^c_l\bar{X}^{kl}\right] \\
&= \frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl}.
\end{aligned}$$

De même, en remplaçant $\bar{\varphi}^a_l \bar{X}^{kl}$ (respectivement $\bar{\psi}^c_j X^{ij}$) dans $\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl}$ par $\bar{b}^{kl}\dfrac{\partial \bar{\varphi}^a_l}{\partial \bar{z}^\beta}$ (respectivement par $\bar{b}^{kl}\dfrac{\partial \bar{\psi}^c_l}{\partial \bar{z}^\beta}$), il vient :

$$\begin{aligned}
\left(w^1_{\beta ij} + w^2_{\beta ij}\right) X^{ij} &= \frac{2-p}{2} T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)\varphi^a_j X^{ij}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&+ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} \frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)\varphi^a_j X^{ij}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right. \\
&+ \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b^a_i \partial \bar{b}^k_a}(b_a)\varphi^a_j X^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&+ \frac{2-2q}{2} T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}^i_c}(\tilde{b}_c)\psi^c_j X^{ij}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)\bar{\tilde{b}}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}^c_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&+ T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} \frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}^i_c}(\tilde{b}_c)\psi^c_j X^{ij}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}^c_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right. \\
&+ \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}^c_i \partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)\psi^c_j X^{ij}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}^c_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
&= \frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}(z,b)X^{ij}\bar{X}^{kl}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left(w^1_{\alpha kl} + w^2_{\alpha kl}\right)\bar{X}^{kl}\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}\right]^{-1}\left(w^1_{\beta ij} + w^2_{\beta ij}\right) X^{ij} \\
= &\ \frac{2-p}{2} T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_j}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
+ &\ T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} \frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b^i_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}^k_a}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_k}{\partial \bar{z}^\beta}\right. \\
+ &\ \left. F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b^a_i \partial \bar{b}^k_a}(b_a)b^{ij}\frac{\partial \varphi^a_j}{\partial z^\alpha}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}^a_l}{\partial \bar{z}^\beta}\right] \\
+ &\ \frac{2-q}{2} T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}^i_c}(\tilde{b}_c)b^{ij}\frac{\partial \psi^c_j}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}^k_c}(\tilde{b}_c)\bar{\tilde{b}}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}^c_j}{\partial \bar{z}^\beta}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} \frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_k^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right.\\
&+ \quad \left. F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_i^c \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right], \qquad (2.3.6)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \left(w_{\alpha kl}^1 + w_{\alpha kl}^2\right)\bar{X}^{kl}\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\overline{b}^{kl}}\right]^{-1}\left(\delta_{\beta ij}^1 + \delta_{\beta ij}^2\right) X^{ij} \qquad (2.3.7)\\
= \quad & \frac{2-p}{2} T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a)\right]\\
+ \quad & T_1^{2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} \frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a) + F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a) b^{ij}\frac{\partial \varphi_j^a}{\partial z^\alpha}\right]\\
+ \quad & \frac{2-q}{2} T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)\right]\\
+ \quad & T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} \frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c) + F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c) b^{ij}\frac{\partial \psi_j^c}{\partial z^\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

et aussi :

$$
\begin{aligned}
& \left(\delta_{\alpha kl}^1 + \delta_{\alpha kl}^2\right)\bar{X}^{kl}\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\overline{b}^{kl}}\right]^{-1}\left(w_{\beta ij}^1 + w_{\beta ij}^2\right) X^{ij} \qquad (2.3.8)\\
= \quad & \frac{2-p}{2} T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)\right]\\
+ \quad & T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1} \frac{p-2}{2} F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a) + F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\varphi}_l^a}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\\
+ \quad & \frac{2-q}{2} T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_c)\right]\\
+ \quad & T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2} \frac{q-2}{2} F_2^{q-4}(\tilde{b}_c)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(b_c) + F_2^{q-2}(\tilde{b}_c)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\bar{b}^{kl}\frac{\partial \bar{\psi}_l^c}{\partial \bar{z}^\beta}\right].
\end{aligned}
$$

Pour le dernier terme on remplace $\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)$ par $\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}\varphi_j^a X^{ij}(b_a)$. On remarque que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]^{-1}\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k}(b_a) &= \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{b}_a^k}\left(\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}(b_a)\right)\\
&= \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{b}_a^k}\left(\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\right)\\
&= \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]^{-1}\frac{\partial F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}\\
&= \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\varphi_j^a X^{ij}
\end{aligned}$$

De même si on remplace $\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}$ par $\frac{\partial F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i}\psi_j^c X^{ij}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\delta^1_{\alpha kl}+\delta^2_{\alpha kl}\right)\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\bar{b}^{kl}}\right]^{-1}\left(\delta^1_{\beta ij}+\delta^2_{\beta ij}\right) \qquad (2.3.9)\\
= \;& \frac{2-p}{2}T_1^{2-2p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a)\right]\\
+\;& T_1^{2-p}\left[\sum_{a=1}^{a=Q_1}\frac{p-2}{2}F_1^{p-4}(b_a)\frac{\partial F_1^2}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta}(b_a)+F_1^{p-2}(b_a)\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i}(b_a)\left[\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]^{-1}\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k}(b_a)\right]\\
+\;& \frac{2-q}{2}T_2^{2-2q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}\right]\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_C)\right]\\
+\;& T_2^{2-q}\left[\sum_{c=1}^{c=Q_2}\frac{q-2}{2}F_2^{q-4}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial z^\alpha}(\tilde{b}_C)\frac{\partial F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta}(\tilde{b}_c)+F_2^{q-2}(\tilde{b}_C)\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i}(\tilde{b}_c)\left[\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\right]^{-1}\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k}(\tilde{b}_c)\right]
\end{aligned}$$

Les développements précédents permettent de faciliter le regroupement des termes une fois que l'on ajoute $-\frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}(z,b)$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha}(z,b)+\left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial b^{ij}\partial \bar{b}^{kl}}(z,b)\right]^{-1}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b^{ij}}(z,b)\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}^{kl}}(z,b)\\
=\;& -(3.3.4)-(2.3.4)+(2.3.6)+(2.3.7)+(2.3.8)+(2.3.9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & T_1^{2-p} \sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a) \left[ -\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[ \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \bar{b}_a^k} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k} \right] \\
+ \quad & T_2^{2-q} \sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c) \left[ -\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[ \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \bar{\tilde{b}}_c^k} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k} \right]
\end{aligned}
$$

Ceci nous permet de conclure que $F$ est à courbure négative dès que :

$$
\begin{aligned}
& T_1^{2-p} \sum_{a=1}^{a=Q_1} F_1^{p-2}(b_a) \left[ -\frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[ \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial b_a^i \bar{b}_a^k} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial b_a^i} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{b}_a^k} \right] \\
& + T_2^{2-q} \sum_{c=1}^{c=Q_2} F_2^{q-2}(\tilde{b}_c) \left[ -\frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial z^\alpha} + \left[ \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \tilde{b}_c^i \bar{\tilde{b}}_c^k} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial \bar{z}^\beta \partial \tilde{b}_c^i} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{\tilde{b}}_c^k} \right]
\end{aligned}
$$

est définie négative.

# Chapitre 3

# Enveloppe inférieure de fonctions admissibles sur la grassmannienne $G_{m,nm}(\mathbb{C})$

Dans le présent chapitre on prouve l'existence d'une fonction extrémale minorant toutes les fonctions admissibles à sup nul sur des variétés de Fano non toriques, à savoir la grassmannienne complexe $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. Les fonctions considérées sont invariantes par un groupe d'automorphismes convenablement choisi. Cette minoration est faite dans le but de calculer, pour cette classe de fonctions, l'invariant de Tian sur ces variétés.

## 3.1 Définitions et constructions

On désigne par $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ la grassmannienne complexe des $m$ plans de $\mathbb{C}^{nm}$. Il s'agit d'une variété complexe compacte de dimension $m^2(n-1)$. Soit $M_{nm,m}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices complexes $nm \times m$ ($nm$ lignes et $m$ colonnes) et $L_{nm,m}(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices de rang $m$. Un point de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ est repéré par une matrice $M \in L_{nm,m}(\mathbb{C})$ :

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$$

où les $Z_j = \begin{pmatrix} l_{jm+1} \\ \vdots \\ l_{(j+1)m} \end{pmatrix}$ (pour $0 \leq j \leq n-1$) sont des matrices complexes d'ordre $m$, et les $(l_{jm+k})_{1\leq k\leq m}$ représentent les lignes.

Soit $I = \{i_1, ..., i_m\}$, où $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq nm$, $Z_I$ représente la matrice d'ordre $m$ donnée par :

$$Z_I = \begin{pmatrix} l_{i_1} \\ \vdots \\ l_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les ouverts de cartes usuelles $U_I$ de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ sont donnés par :

$$U_I = \{M \in G_{m,nm}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \det Z_I \neq 0\}.$$

Par exemple, tout point $M = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \in U_{I_0}$ où $I_0 = \{1, 2, ..., m\}$ s'écrit :

$M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z'_1 \\ \vdots \\ Z'_{n-1} \end{pmatrix}$ où $Id_0$ est la matrice identité d'ordre $m$ et, pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, $Z'_j = Z_j Z_0^{-1}$ .

On munit $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ de la métrique $g$, obtenue à partir de celle de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^{r-1}\mathbb{C}$ avec $r = \begin{pmatrix} nm \\ m \end{pmatrix}$. Dans un système de coordonnées locale $(z^\alpha)_{1\leq\alpha\leq m^2(n-1)}$ dans la carte $U_{I_0}$, $g$ s'écrit comme suit :

$$g = a_n \partial_{\alpha\bar{\beta}} \ln \left( 1 + \sum_{I\subset\{1,...,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2 \right)$$

où $a_n = nm$ et $\partial_{\alpha\bar{\beta}} = \dfrac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$. La constante $a_n$ est choisie de sorte que la métrique soit bien dans la première classe de Chern $C_1(G_{m,nm}\mathbb{C})$ de $G_{m,nm}\mathbb{C}$. $g$ est bien une métrique Kählerienne sur $G_{m,nm}\mathbb{C}$ et sa $(1,1)$ forme fermé associé est donnée par :

$$\omega = i a_n \partial_{\alpha\bar{\beta}} \ln \left( 1 + \sum_{I\subset\{1,...,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2 \right) dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}$$

**Définition 3.1.1** *Une fonction $\varphi \in C^\infty(G_{m,nm}\mathbb{C})$ est g-admissible si $g + \partial_{\alpha\bar{\beta}}\varphi$ est définie positive.*

La fonction $\tilde{\psi}$ de $nm^2$ variables définie sur $L_{nm,m}(\mathbb{C})$ et donnée par :

$$\tilde{\psi}(M) = \ln\left(\frac{\prod_{j=0}^{j=n-1}|\det Z_j|^{2m}}{\left(\sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}}|\det Z_I|^2\right)^{a_n}}\right)$$

induit une fonction sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ privé des bords des cartes $U_I$. En effet, la multiplication à droite de chaque matrice $Z_j$ d'ordre $m$ (pour $0 \leq j \leq n-1$) d'un point $M$ de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ par une matrice $A \in Gl_m(\mathbb{C})$ donne $M' = \begin{pmatrix} Z_0A \\ \vdots \\ Z_{n-1}A \end{pmatrix}$. Sachant que $a_n = nm$, il vient :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(M') &= \ln\left(\frac{|\det A|^{2nm}\prod_{j=0}^{j=n-1}|\det Z_j|^{2m}}{|\det A|^{2nm}\left(\sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}}|\det Z_I|^2\right)^{a_n}}\right)\\ &= \tilde{\psi}(M)\end{aligned}$$

Son expression dans la carte $U_{I_0}$ est donnée par :

$$\tilde{\psi}(M) = \ln\left(\frac{\prod_{j=0}^{j=n-1}|\det Z_j|^{2m}}{\left(1+\sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\backslash I_0}|\det Z_I|^2\right)^{a_n}}\right)$$

Posons $\psi = \tilde{\psi} - \sup\tilde{\psi} = \tilde{\psi} + a_n m\ln(n)$. Cette nouvelle fonction atteint un sup égal à zéro en les points $\begin{pmatrix} Id_0 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} \in G_{m,nm}(\mathbb{C})$ et tend vers moins l'infini sur les frontières des cartes $U_I$. Ce résultat sera démontré ultérieurement (Voir Proposition 3.3.1).

## 3.2 Isométries de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$

Le groupe des matrices $U_{nm}(\mathbb{C})$ agit transitivement par multiplication à gauche sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. Par conséquent, étant donnés deux points $M$ et $N$ de $G_{m,nm}(\mathbb{C})$, il existe toujours une isométrie qui transforme $M$ en $N$.

On considère les isométries $i\ :\ G_{m,nm}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{m,nm}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$i(M) = D$$

où $D$ est donnée par la description suivante :
Soit

$$M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \in \bigcap_I \{\det Z_I \neq 0\}.$$

Les matrices $Z_j$ (pour $1 \leq j \leq n-1$) étant inversible, d'après la décomposition polaire, on sait il existe un unique couple $(U_j, H_j) \in U_m(\mathbb{C}) \times H_m^+(\mathbb{C})$ tel que $Z_j = U_j H_j$. Toutefois, $H_j$ étant Hermitienne définie positive, $H_j$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels strictement positifs, en d'autres termes $H_j = P_j^{-1} D_j P_j$ où $P_j \in U_m(\mathbb{C})$ et $D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j^m \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale $m \times m$ dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de $H_j$.

L'existence d'un tel automorphisme est assuré par l'action transitive du groupe des matrices unitaires $U_{nm}(\mathbb{C})$ sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. En particulier, parmi ces automorphismes on considère aussi les applications $\phi_U$ et $P_{ij}$ (pour $i, j \in \{0, ..., n-1\}$), définies comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \phi_U\ :\ & G_{m,nm}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & G_{m,nm}(\mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} UZ_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\phi_U$ correspond donc à la multiplication à gauche des matrices $Z_j$ (pour $0 \leq j \leq n-1$) par une matrice unitaire $U \in U_m(\mathbb{C})$. $P_{ij}$ échange les matrices $Z_j$ (pour $\{0 \leq j \leq n-1\}$) entre elles. En d'autres termes on a :

$$P_{ij} \; : \; G_{m,nm}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{m,nm}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_j \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ces deux applications sont bien définies. On note $G$ le groupe engendré par les isométries $i$. La métrique $g$ est, par définition, invariante par l'action de $G$.

## 3.3 Enveloppe inférieure de fonctions admissibles sur la grassmannienne $G_{m,nm}(\mathbb{C})$

Tous les calculs qui vont suivre s'effectuent dans la carte définie par

$$U_{I_0} = \{M \in G_{m,nm}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \det Z_{I_0} \neq 0\}.$$

Dans la carte $U_{I_0}$, une fonction $\varphi$ définie sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ $G$-invariante vérifie en particulier :

$$\varphi \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Z_1 \\ Id_0 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} UZ_1 \\ Id_0 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Id_0 \\ UZ_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$$

et, dans l'intersection des cartes $(\bigcap_I \{\det Z_I \neq 0\})$,

$$\varphi \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Z_1 \\ Id_0 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1^{-1} \times Id \\ Z_2 Z_1^{-1} \\ \vdots \\ Z_{n-1} Z_1^{-1} \end{pmatrix}$$

L'objectif de cette section est de montrer que les fonctions $\varphi \in C^{\infty}(G_{m,nm}(\mathbb{C})$, $g$-admissibles et $G$-invariante à sup nul sont minorées par la fonction $\psi$ définie précédemment. Ce qui justifie l'appellation "enveloppe inférieure".

**Théorème 3.3.1** *Soit $\varphi \in C^{\infty}(G_{m,nm}(\mathbb{C}))$ une fonction $g$-admissible et $G$-invariante, vérifiant* $\sup\limits_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} \varphi = \varphi \begin{pmatrix} Id_0 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} = 0$ *. Alors on a : $\varphi \geq \psi$.*

## 3.3.1 Preuve des Théorèmes 3.3.1

**Proposition 3.3.1** *$\psi$ est $G$-invariante et atteint son sup sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$, égal à zéro, en tout point de $U_m(\mathbb{C})$. $\psi$ et $\tilde{\psi}$ vérifient :*

$$\partial_{\lambda\bar{\mu}}\psi = \partial_{\lambda\bar{\mu}}\tilde{\psi} = -g$$

**Preuve 3.3.1** *La preuve s'effectue en trois étapes.*

**Étape 1 :** *Les fonctions $\psi$ et $\tilde{\psi}$ sont $G$-invariantes. En effet, dans la description $Z_j = U_j H_j = U_j P_j^{-1} D_j P_j$ (pour $1 \leq j \leq n-1$) on a : $\det Z_j = \det D_j$. D'autre part le potentiel logarithmique de la métrique $(1 + \sum\limits_{I \setminus I_0} |D_I|^2)$ ,visible au dominateur de la fonction $\psi$, est invariant par l'action des isométries $i$. Par conséquent $\tilde{\psi}$ est $G$-invariante ainsi que la fonction $\psi$.*

**Étape 2 :** $\partial_{\lambda\bar{\mu}}\psi = \partial_{\lambda\bar{\mu}}\tilde{\psi} = -g$ *car* $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\ln(|f(z)|^2) = 0)$ *lorsque $f$ est holomorphe.*

**Étape 3 :** *Par les propriétés de $G$-invariance de $\psi$, on se ramène au cas où* $M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$*. Dans ce cas, la fonction $\psi$ est égale à :*

$$\psi(M) = \ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{n-1} |\det D_j|^{2m}}{(1 + \sum_{I \setminus I_0} |D_I|^2)^{a_n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{|(\lambda_1^1...\lambda_1^m)...(\lambda_{n-1}^1...\lambda_{n-1}^m)|^{2m}}{(1+\sum_{I\setminus I_0}|D_I|^2)^{a_n}}\right).$$

*Montrons que pour tout point* $M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \in G_{m,mn}(\mathbb{C})$, *on a :*

$$\psi(M) < \psi\begin{pmatrix} Id_0 \\ Id_1 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*Soit* $f$ *la fonction définie en tout point* $M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \in U_{I_0}$ *de* $G_{m,mn}(\mathbb{C})$ *par :*

$$f(M) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}|\det D_j|^{2m}}{(1+\sum_{I\setminus I_0}|D_I|^2)^{a_n}}.$$

*Remarquons que la fonction* $K : (\mathbb{R}_+^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *définie par*

$$K(x_1, ..., x_n) = \frac{(x_0...x_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{x_0 + ... + x_{n-1}}$$

*atteint son sup en les points* $(1, ..., 1)$. *Par conséquent ,* $\forall M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \in G_{m,mn}(\mathbb{C})$ *on obtient :*

$$f(M) \leq \frac{\prod_{j=1}^{n-1}|\det D_j|^{2m}}{\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}|\det D_j|^2\right)^{a_n}}$$

*Cette dernière fonction n'est autre que la fonction* $K^{nm}$ *(avec* $x_0 = 1$ *et* $x_j = |\det D_j|^2$ *pour* $1 \leq j \leq n-1$ *). Ainsi* $f$ *atteint son sup en* $\det D_j = 1$ *(pour* $1 \leq j \leq n-1$*). En revanche* *le point* $\begin{pmatrix} Id_0 \\ Id_1 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}$ *vérifie cette condition, ainsi la fonction* $f$ *atteint son sup en ce point.*

**Lemme 3.3.1** *Soit* $\varphi \in C^\infty(G_{m,mn}(\mathbb{C}))$*, g-admissible et G-invariante. On a :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix}$$

**Preuve 3.3.2** *La démonstration se fait par récurrence. Supposons que pour* $1 \leqslant p < n-1$ *on a :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_p)^{\frac{1}{p}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_p)^{\frac{1}{p}} \\ D_{p+1} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

*et montrons que*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_{p+1})^{\frac{1}{p+1}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_{p+1})^{\frac{1}{p+1}} \\ D_{p+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Supposons que l'inégalité 3.3.1 n'est pas satisfaite au rang* $(p+1)$*, alors il existe un point*

$$M_0 = \begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \in G_{m,nm}(\mathbb{C})$$

*tel que*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} < (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1^0\cdots D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}} \\ \vdots \\ (D_1^0\cdots D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}} \\ D_{p+2}^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

*En utilisant la $G$-invariance de $\varphi$ on peut supposer que $(\lambda_j^1)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ (relatifs aux $D_1^0, ..., D_{p+1}^0$) vérifient $\lambda_1^1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{p+1}^1$. D'autre part, toujours par $G$-invariance de $\varphi$, l'hypothèse de récurrence donne :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1^0 \\ \vdots \\ D_{p-1}^0 \\ D_p^0 \\ D_{p+1}^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \geq (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1^0\cdots D_{p-1}^0 D_p^0)^{\frac{1}{p}} \\ \vdots \\ (D_1^0\cdots D_{p-1}^0 D_p^0)^{\frac{1}{p}} \\ D_{p+1}^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

*et*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ D_1^0 \\ \vdots \\ D_{p-1}^0 \\ D_{p+1}^0 \\ D_p^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \geq (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1^0\cdots D_{p-1}^0 D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p}} \\ \vdots \\ (D_1^0\cdots D_{p-1}^0 D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p}} \\ D_p^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

*Considérons, pour* $t \in \left[(\lambda_p^1)^{\frac{1}{p}}, (\lambda_{p+1}^1)^{\frac{1}{p}}\right]$, *la courbe* $c(t)$ *définie par :*

$$C(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{[1]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[1]}^m(t) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \zeta_{[p]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[p]}^m(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta_{[p+1]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[p+1]}^m(t) \end{pmatrix} \\ D_{p+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

*où*

$$\begin{cases} \left(\zeta_{[j]}^1(t)\right)_{1 \leqslant j \leqslant p} = (\lambda_1^1 \cdots \lambda_{p-1}^1)^{\frac{1}{p}} t \\ \left(\zeta_{[j]}^i(t)\right)_{1 \leqslant j \leqslant p} = (\lambda_1^i \cdots \lambda_p^i)^{\frac{1}{p}} \left(\dfrac{t}{(\lambda_p^1)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\left\{\dfrac{\ln((\lambda_{p+1}^i)^{\frac{1}{p}}/(\lambda_p^i)^{\frac{1}{p}})}{\ln((\lambda_{p+1}^1)^{\frac{1}{p}}/(\lambda_p^1)^{\frac{1}{p}})}\right\}}, \quad \forall\, 2 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

*et*

$$\begin{cases} \zeta^1_{[p+1]}(t) = \dfrac{\lambda^1_p \lambda^1_{p+1}}{t^p} \\ \zeta^i_{[p+1]}(t) = \lambda^i_{p+1} \left(\dfrac{t^p}{\lambda^1_p}\right)^{\left\{\dfrac{\ln((\lambda^i_p)^{\frac{1}{p}}/(\lambda^i_{p+1})^{\frac{1}{p}})}{\ln((\lambda^1_{p+1})^{\frac{1}{p}}/(\lambda^1_p)^{\frac{1}{p}})}\right\}}, \quad \forall \ 2 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

*Compte tenu de l'équation 3.3.2, les matrices* $D^0_j$, $1 \leqslant j \leqslant p+1$ *ne peuvent être tous égaux. Comme on a choisi* $\lambda^1_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda^1_{n-1}$ *la courbe* $c(t)$ *passe en* $t = (\lambda^1_p)^{\frac{1}{p}}$ *par le point*

$$P_1 = \begin{pmatrix} Id_0 \\ (D^0_1 \cdots D^0_{p-1} D^0_p)^{\frac{1}{p}} \\ \vdots \\ (D^0_1 \cdots D^0_{p-1} D^0_p)^{\frac{1}{p}} \\ D^0_{p+1} \\ \vdots \\ D^0_{n-1} \end{pmatrix},$$

*et en* $t = (\lambda^1_{p+1})^{\frac{1}{p}}$ *par le point*

$$P_2 = \begin{pmatrix} Id_0 \\ (D^0_1 \cdots D^0_{p-1} D^0_{p+1})^{\frac{1}{p+1}} \\ \vdots \\ (D^0_1 \cdots D^0_{p-1} D^0_{p+1})^{\frac{1}{p+1}} \\ D^0_p \\ \vdots \\ D^0_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*Le point* $t_0 = ((\lambda^1_p \lambda^1_{p+1})/(\lambda^1_1 \cdots \lambda^1_{p-1})^{\frac{1}{p}}) \in \left[(\lambda^1_p)^{\frac{1}{p}}, (\lambda^1_{p+1})^{\frac{1}{p}}\right]$. *Enfin pour* $t = t_0$, *la courbe* $c(t)$

*passe par le point*

$$P_3 = \begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1^0 \cdots D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}} \\ \vdots \\ (D_1^0 \cdots D_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}} \\ D_{p+2}^0 \\ \vdots \\ D_{n-1}^0 \end{pmatrix}.$$

*De ce fait en utilisant les relations 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4 on déduit que :*

$$(\varphi - \psi)(P_3) > (\varphi - \psi)(P_1) \text{ et } (\varphi - \psi)(P_3) > (\varphi - \psi)(P_2).$$

*Ceci prouve que la fonction $(\varphi - \psi)$ admet un maximum local sur la courbe $c(t)$. De plus et encore par $G$-invariance de la fonction $(\varphi - \psi)$, on a :*

$$(\varphi-\psi)(c(t)) = (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{[1]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[1]}^m(t) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \zeta_{[p]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[p]}^m(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta_{[p+1]}^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_{[p+1]}^m(t) \end{pmatrix} \\ D_{p+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi - \psi)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1_{[1]}(te^{i\theta}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[1]}(te^{i\theta}) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \zeta^1_{[p]}(te^{i\theta}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[p]}(te^{i\theta}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta^1_{[p+1]}(te^{i\theta}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[p+1]}(te^{i\theta}) \end{pmatrix} \\ D_{p+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = (\varphi - \psi)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1_{[1]}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[1]}(z) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \zeta^1_{[p]}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[p]}(z) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta^1_{[p+1]}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^m_{[p+1]}(z) \end{pmatrix} \\ D_{p+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi - \psi)(c(z))$$

*où $c(z)$ est la courbe définie sur la couronne $\left\{(\lambda^1_p)^{\frac{1}{p}} \leqslant |z| \leqslant (\lambda^1_{p+1})^{\frac{1}{p}}\right\}$. La fonction $(\varphi - \psi)$ admet donc un maximum local à l'intérieur de cette couronne, sa hessienne est donc négative en ces points, par conséquent*

$$\frac{\partial^2[(\varphi-\psi)(c(z))]}{\partial z \partial \bar{z}}(z_0) = \frac{\partial^2(\varphi-\psi)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}(c(z_0))\dot{c}^i(z_0)\dot{\bar{c}}^j(z_0) < 0.$$

*Ceci contredit l'admissibilité de $\varphi$.*

***Lemme 3.3.2*** *Étant donné une fonction $\varphi \in C^\infty(G_{m,nm})$, $g$-admissible, $G$-invariante, on* *a :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ Id_1 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}$$

***Preuve 3.3.3*** *On pose*

$$A=(D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=\begin{pmatrix} (\lambda_1^1...\lambda_{n-1}^1)^{\frac{1}{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda_1^m...\lambda_{n-1}^m)^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix}$$

*Comme $(\varphi-\psi)$ est $G$-invariante alors on peut écrire :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ A \\ A \\ \vdots \\ A \end{pmatrix}=(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} A^{-1} \\ Id_1 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}=(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ A^{-1} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}$$

*En appliquant maintenant le Lemme 3.3.1, on obtient :*

$$\begin{aligned}(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ A^{-1} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} &\geq (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (A^{-1}Id_2\cdots Id_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (A^{-1}Id_2\cdots Id_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} \\ &\geq (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (A^{-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (A^{-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Toujours par G-invariance, on a :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (A^{-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (A^{-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} = (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ \left((A^{-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)^{-1} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} = (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ A^{\frac{1}{n-1}} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Or*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ A^{\frac{1}{n-1}} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} = (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ \left((D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ Id_2 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

*Par conséquent en itérant q fois ce procédé ($q \in \mathbb{N}^*$), on obtient :*

$$(\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi-\psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)^q}} \\ \vdots \\ (D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)^q}} \end{pmatrix}$$

*où*

$$(D_1\cdots D_{n-1})^{\frac{1}{(n-1)^q}} = \begin{pmatrix} (\lambda_1^1\ldots\lambda_{n-1}^1)^{\frac{1}{(n-1)^q}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda_1^m\ldots\lambda_{n-1}^m)^{\frac{1}{(n-1)^q}} \end{pmatrix}$$

*On pose $x_1 = (\lambda_1^1\ldots\lambda_{n-1}^1)^{\frac{1}{(n-1)^q}}$,...,$x_m = (\lambda_1^m\ldots\lambda_{n-1}^m)^{\frac{1}{(n-1)^q}}$. Ces suites $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ tendent vers 1 quand q tend vers l'infini. D'où le résultat.*

**Preuve du Théorème 3.3.1.** *Soit $\varphi$ une fonction vérifiant les conditions de Théorème 3.3.1, dans la carte*

$$U_{I_0} = \{M \in G_{m,nm}(\mathbb{C}) \text{ tel que } \det Z_{I_0} \neq 0\}$$

*et pour un point* $M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$ *vérifiant* $\det Z_j \neq 0$, *pour* $1 \leqslant j \leqslant n-1$, *le Lemme 3.3.1 implique*

$$(\varphi - \psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi - \psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ (D_1 \cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \\ \vdots \\ (D_1 \cdots D_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

*où $D_j$ est la matrice diagonale formée par les valeurs propres de la matrice Hermitienne $H_j$ donnée par la décomposition polaire de $Z_j$ (pour $1 \leq j \leqslant n-1$). Puis en utilisant le Lemme 3.3.2 on obtient :*

$$(\varphi - \psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant (\varphi - \psi)\begin{pmatrix} Id_0 \\ Id_1 \\ \vdots \\ Id_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

*Par conséquent $\varphi \geq \psi$ en tout point $M$ de la carte $U_{I_0}$ vérifiant* $\det Z_j \neq 0$ *(pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$). Pour les points* $M = \begin{pmatrix} Id_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$ *ayant au moins une matrice $Z_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ tel que* $\det Z_j = 0$, *on a $\varphi \geqslant \psi$ car $\psi = -\infty$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.3.1.*

***Théorème 3.3.2*** $\forall \alpha < \dfrac{1}{m}$, *on a l'inégalité de type Tian-Hormander suivante (Voir [H], [T]) :*

$$\int_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\varphi} dv \;\leqslant\; Cst$$

*pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(G_{m,nm}(\mathbb{C}))$, g-admissible et G-invariante vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur $G_{m,nm}(\mathbb{C})$.*

### 3.3.2 Preuve des Théorèmes 3.3.2 : Calcul de l'invariant de Tian

*Soit* $\varphi \in C^\infty(G_{m,nm}(\mathbb{C}))$, *g-admissible et G-invariante vérifiant* $\sup \varphi = 0$ *sur* $G_{m,nm}(\mathbb{C})$. *D'après le Théorème 3.3.1, on a* $\varphi \geqslant \psi$ *en tout point* $M \in G_{m,mn}(\mathbb{C})$, *par suite pour tout* $\alpha \geqslant 0$ *on a :*

$$\int_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\varphi}\, dv \;\leqslant\; \int_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\psi}\, dv$$

*Calculons cette dernière intégrale dans la carte définie par*

$$U_{I_0} = \{M \in G_{m,nm}(\mathbb{C}) \text{ such that } \det Z_{I_0} \neq 0\}.$$

*Dans cette carte l'élément de volume relatif à la métrique g sur* $G_{m,nm}(\mathbb{C})$ *est donné par (Voir [G]) :*

$$dv = b_n \left(1 + \sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2\right)^{-a_n} dz_J \wedge d\bar{z}_J$$

*où* $a_n = nm$, $b_n = (\frac{i}{2})^{m^2(n-1)}$ *et* $J = \{1, ..., (n-1)m^2\}$. *Ainsi on obtient :*

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{m,nm}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\psi}\, dv \\
= \;& b_n \int_{\mathbb{C}^{(n-1)m^2}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{j=n-1} |\det Z_j|^{2m}}{\left(1 + \sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2\right)^{a_n}}\right)^{-\alpha} \left(1 + \sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2\right)^{-a_n} dz_J \wedge d\bar{z}_J \\
= \;& b_n \int_{\mathbb{C}^{(n-1)m^2}} \frac{\prod_{j=1}^{j=n-1} |\det Z_j|^{-2m\alpha}}{\left(1 + \sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\setminus I_0} |\det Z_I|^2\right)^{a_n(1-\alpha)}}\; dz_J \wedge d\bar{z}_J \\
= \;& b_n \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \frac{\left(1 + \sum_{I\subset\{1,\ldots,nm\}\setminus I_0} \det D'_I\right)^{a_n(\alpha-1)}}{\prod_{j=1}^{j=n-1} (\det D'_j)^{m\alpha}}\; (du_1^1 \ldots du_1^m) \ldots (du_{n-1}^1 \ldots du_{n-1}^m)
\end{aligned}$$

*où* $(D'_j)_{1\leq j\leq n-1} = \begin{pmatrix} u_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_j^m \end{pmatrix}$ *et* $(u_j^1)_{1\leq j\leq n-1} = (\lambda_j^1)^2_{1\leq j\leq n-1}$.

*Cette intégrale converge pour* $\alpha < \dfrac{1}{m}$.

# Guide de symboles et notations

- $E$ : *fibré vectoriel holomorphe de rang* $r$. **page** 17.
- $X$ : *variété complexe de dimension* $n$. **page** 17.
- $E^0$ : *fibré vectoriel* $E$ *privé de sa section nulle* $\{0_E\}$. **page** 17.
- $T^{1,0}X$ : *fibré tangent holomorphe associé à la variété* $X$. **page** 17.
- $T^{1,0}E^0$ : *fibré tangent holomorphe associé au fibré* $E^0$. **page** 17.
- $\theta_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$ : *les coefficients de la connexion Hermitienne de Chern.* **page** 17.
- $\mathbb{P}(E)$ : *fibré projectif.* **page** 17.
- $L(E)$ : *fibré tautologique .* **page** 17.
- $F$ : *métrique Finslérienne complexe.* **page** 18.
- $G_{i\bar{j}}$ : *le tenseur fondamental de la métrique Finslérienne.* **page** 18.
- $p^{-1}E$ : *pull-back du fibré* $E$ *au dessus de* $\mathbb{P}(E)$ *.* **page** 20.
- $h$ : *métrique hermitienne sur* $p^{-1}E$. **page** 21.
- $\Gamma^i_{j\alpha}$, $C^i_{jk}$ : *les coefficients de la connexion Finslérienne de Chern (notation adoptée par Kobayashi).* **page** 21.
- $\Upsilon^i_j$ : *la matrice de la connexion Finslérienne de Chern.* **page** 21.

- $\psi$ : *la fonction extrémale.* **page** 59.
- $GL_m(\mathbb{C})$ : *les matrices inversibles d'ordre* $m$.. **page** 59.
- $U_m(\mathbb{C})$ : *le groupe des matrices unitaires d'ordre* $m$.. **page** 60.
- $H_m^+(\mathbb{C})$ : *l'espace des matrices Hermitienne définie positive d'ordre* $m$.. **page** 60.

# Bibliographie


*[A]* Th. Aubin *, Équation du type Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 283, Volume 119, (1976).

*[A1]* Th. Aubin*, Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations,* Springer-verlag, BerlinYork, (1982).

*[A2]* Th. Aubin*, Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes à la démonstration d'une inégalité,* J.Funct. Anal, 57, (1984).

*[A3]* T. Aikou*, A Partial connection on complex Finsler Bundles and its applications,* Illinois Journal Of Mathematics, 42,Number 3, (1998).

*[A4]* T. Aikou*, The Chern-Finsler connection and Finsler-Kähler manifolds,* Adv. Stud. in Pure Math, 48(2007), 343-373.

*[A-P]* M. Abate et G. Patrizio*, Finler metrics : a global approach,* Lecture Note in Math, 1591, Springer, Berlin, (1994).

*[B]* A.B en Abdesselem*, Complex Finsler Structures on Tensor Products,* J.Geometric Analysis, 12, 2002, 529-542.

*[B1]* A. Ben Abdesselem*, Équations de Monge-Ampère d'origine géométrique sur certaines variétés algébriques,* J.of Functional Analysis, 149, 1997, 102-134.

*[B2]* A. Ben Abdesselem, *Lower bound of amissible functions on sphere,* Bull.Sci.Math. 126, 2002, 675-680.

*[B3]* A. Ben Abdesselem, *Enveloppes inférieurs de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas symétriques,* Bull.Sci.Math. 130, 2006, 341-353.

*[B-D]* A. Ben Abdesselem et B. Dridi, *Enveloppes inférieurs de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas dissymétriques,* Bull.Sci.Math. 130, 2006, 341-353.

*[B-J]* A. Ben Abdesselem et R. Jelloul, *Enveloppe inférieurs de fonctions admissibles sur la Grassmannienne $G_{2,4}\mathbb{C}$ en présence de symétries,* Bull.Sci.Math. 138, 2014, 139-146.

*[B-K]* J. Bland et M. KalKa, *Variations of holomorphic curvature for Kähler Metrics,* Contemporary Mathematics. Volume 196 (1996), 121-131.

*[B-M]* S. Bando et T. Mabuchi, *Uniqueness of Einstein-Kähler metrics modulo connected group actions,* Algebraic geometry, Sendai, 1985, 11-40, Adv. Stud.

*[B-C]* A. Ben Abdesselem et P. Cherrier, *Equations de Monge-Ampère d'origine géométrique sur certaines variétés de Fano,* C. R. Acad. Sci. Paris I Math 325, 1997, 319-322.

*[B-C-1]* A. Ben Abdesselem et P. Cherrier, *Métriques d'Einstein-Kähler sur certaines variétés Kähleriennes à premiére classe de Chern positive,* C. R. Acad. Sci. Paris I Math 316, 1993, 67-72.

*[B-C-2]* A. Ben Abdesselem et P. Cherrier, *Estimation of Ricci tensor on certain Fano Manifolds,* Math.Z.233, 2000, 481-505.

*[B-C-3]* A. Ben Abdesselem et P. Cherrier, *On Ricci curvature on certain complex bundles,* J. Math.Pures Appl.(9) 79(2000), 919-940

*[B-C-4]* A. Ben Abdesselem et P. Cherrier, *Almost psh functions on Calabi's bundles,* Rend.Istit.Mat.Univ.Trieste Vol.XL, 2009, 137-161.

*[C]* S.S. Chern, *Local equivalence and Euclidean connections in Finsler spaces,* Sci. Rep. Nat. Tsing.Hua Univ. Ser. A 5 (1948), 95-121.

*[D]* J.P. Demailly, *Pseudoconvex-concave duality and regularization of currents. Several variables,* Math.Sci.Res.Inst, 37, pp. 233-271. Cambridge University Press, 1999.

*[F]* J.J. Faran, *Hermitian Finsler metrics and the Kobayashi metric,* J.Diff.Geom. 31 (1990), 601-625.

*[F1]* Futaki, *An obstruction to the existence of Einstein-Kählerienne metrics,* Invent. Math 73 (1983), 437-443.

*[G]* G. Julien, *Tian Constant on Grassmann manifolds.Kähler-Einstein metrics ,* J.Geom.Anal.16, (2006), 523 ?533.

*[H]* L. Hörmander, *An Introduction to complex Analysis in Several Variables,* North-Holland, Amesterdam. (1973).

*[K1]* S. Kobayashi, *Differential Geometry and Complex vector bundles,* Iwanami, Princeton University Press, 1987.

*[K2]* S. Kobayashi, *Negative vector bundles and complex Finslerstructures,* Nogoya Math.J. 57, 153-166, 1975.

*[K3]* S. Kobayashi, *Complex Finsler vector bundle,* Contemp. Math.196, 1996, 145-153.

*[L]* A. Lichnérowicz, *Géométrie des groupes de transformations,* Dunod. Paris (1958)

[L1] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule,* Bull.Sci.Math.France 109 (1981), 427-474.

[L2] L. Lempert, *Holomorphic retracts and and intrinsic metrics in convex domains,* Analysis Mathematica 8 (1982), 341-364.

[R] C. Réal, *Métriques d'Einstein-Kähler sur des variétés à premiére classe de Chern positive,* J. Funct. Anal. 106 (1992), 145-188.

[R1] G. Rizza, *F-forme quadratiche hermitiane,* Rend. Mat. Pure e Appl.23 (1965), 221-249.

[R2] H. Rund, *Generalized metrics on complex manifolds,* Math. Nach. 34 or 37 (1967), 55-77.

[R3] H. Rund, *The curvature theory of direction-dependent connections on complex manifolds,* Tensor.N.S. 24 (1972), 182-188.

[T] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $C_1(M) > 0$ , Invent. Math 89 (1987), 225-246.

[T1] G. Tian, *On Calabi's Conjecture for Complex Surfaces with positive first chern class* , Invent. Math 101 (1990), 201-172.

[Y] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kählerienne manifold and the compex Monge-Ampère equation, I, Comm. Pure Appl. Math. 31 339-411, (1978)*

[T-Y] S.T. Yau et G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with* $C_1(M)$ *positive,* Commun. Math.Phys. 11é (1987), 175-203.